

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе

Дисциплина: «Численные методы математической физики»

Тема: **«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»**

Вариант № 2

Выполнили студенты: Катков П.И., Гайдар А.И.

Группа: 6407-010302D

Преподаватель: Дегтярев А.А.

Самара, 2019

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

- 1 Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
- 2 Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
- 3 Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
- 4 Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.
- 5 Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.
- 6 Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

Вариант 2

Разработать программу численного моделирования теплового процесса в тонком однородном стержне длиной l , сечением s на временном промежутке $0 < t \leq T$, если боковая поверхность стержня теплоизолирована, температура одного из концов стержня поддерживается равной u_0 , а на другом конце происходит теплообмен с окружающей средой, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена α .

Начальная температура стержня распределена по закону

$$u|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Коэффициенты теплопроводности и объёмной теплоёмкости материала стержня равны k и c соответственно.

Предполагается отсутствие внутренних источников тепла. Температура окружающей среды равна u_0 .

Для численного решения задачи использовать:

- конечно-разностную схему Кранка-Николсона (Гайдар Артём);
- простейшую неявную конечно-разностную схему (Катков Павел).

При проведении расчётов использовать значения параметров $l, s, T, u_0, k, c, \alpha$, а также выражение функции $\psi(x)$, указанные преподавателем.

Значения параметров, указанные преподавателем:

$$\begin{aligned} l &= 2 \text{ см}, \\ s &= 0,01 \text{ мм}^2, \\ T &= [0; 20] \text{ с}, \\ u_0 &= 0^\circ, \\ k &= 0,04 \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}}, \\ c &= 2 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}}, \\ \alpha &= 0,01 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}}, \\ \psi(x) &= \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \end{aligned}$$

РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 39 с., 4 рисунка, 2 таблицы, 4 источника,
1 приложение.

*УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА,
УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ,
МЕТОД ПРОГОНКИ, МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ.*

Целью курсовой работы является построение и исследование разностной схемы для решения краевой задачи теплопроводности для тонкого однородного стержня.

Для решения задачи использована конечно-разностная схема Кранка-Николсона и неявная конечно-разностная схема. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи.

Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки и позволяющая рассчитывать решение сеточной задачи.

Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности.

Программа написана на языке Python 3.6, операционная система Ubuntu 18.04.1.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Математическая постановка задачи.....	7
2 Неявная разностная схема	10
2.1 Построение простейшей неявной разностной схемы	10
2.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы	11
2.3 Устойчивость неявной разностной схемы	14
2.4 Метод прогонки для неявной разностной схемы	17
2.5 Исследование сходимости неявной разностной схемы	19
3 Разностная схема Кранка-Николсона	20
3.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсона	20
3.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсона	21
3.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсона.....	23
3.4 Метод прогонки для схемы Кранка-Николсона	26
3.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсона	29
4 Описание программы	30
5 Исследование погрешности с помощью вычислительного эксперимента ..	33
Заключение.....	35
Список использованных источников.....	36
Приложение А – Код программы на языке Python.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удастся осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи теплопроводности. Вычислительный алгоритм основан на использовании неявной разностной схемы и схемы Кранка-Николсона. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности.

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим тонкий однородный стержень, температура которого в точке пространства (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$.

На рисунке 1 схематично изображён тонкий однородный стержень.

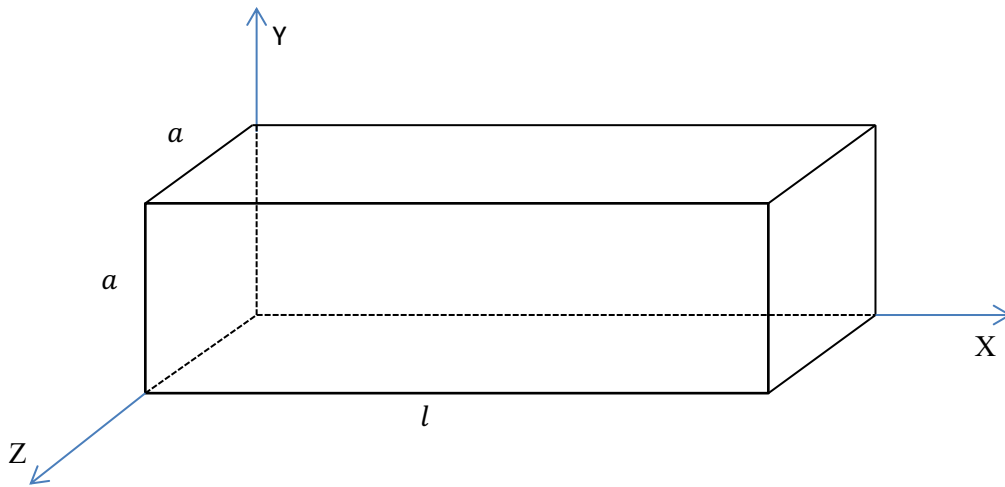


Рисунок 1 – Схематичное изображение стержня

Для вывода уравнения распределения тепла выделим произвольный объем V и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени $0 < t \leq T$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Будем считать, что сечение стержня представляет собой квадрат со стороной a . Найдём среднее распределение тепла по сечению стержня следующим образом:

$$v = \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a u(x, y, z, t) dy dz.$$

Найдём двойные интегралы, воспользовавшись теоремой Фубини [1]:

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial u}{\partial t} dy dz = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \frac{\partial u}{\partial t} dy \right) dz = \frac{\partial v}{\partial t};$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy dz = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy \right) dz = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy dz = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) dz = 0;$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dy dz = \frac{1}{a^2} \int_0^a \left(\int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz \right) dy = 0.$$

В итоге получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{c} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right).$$

Обозначим через q плотность теплового потока - количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени [2]:

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}.$$

Теплообмен на границе стержня $x = l$ описывается законом Ньютона с коэффициентом теплообмена α , то есть плотность теплового потока q будет определяться следующим образом:

$$q|_{x=l} = \alpha(u|_{x=l} - u_0).$$

Продифференцируем исходную функцию по нормали на грани $x = l$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_x} \right|_{x=l} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\bar{n}_x, \bar{e}_x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\bar{n}_x, \bar{e}_y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\bar{n}_x, \bar{e}_z) \right) \Big|_{x=l} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Выразим значение плотности теплового потока в точке l по оси x :

$$q|_{x=l} = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \right) = \alpha(u|_{x=l} - u_0).$$

Выражая из последней формулы частную производную получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{\alpha}{k}(u|_{x=l} - u_0).$$

В итоге математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{c} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), & x \in [0, l], \quad t \in [0, T]; \\ v|_{t=0} = u_0 + \psi(x), & x \in [0, l]; \\ v|_{x=0} = u_0, & t \in (0, T]; \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{\alpha}{k}[v|_{x=l} - u_0], & t \in (0, T]. \end{cases}$$

Сделаем замену $w = v - u_0$.

После замены итоговая математическая модель будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{k}{c} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), & x \in [0, l], \quad t \in [0, T]; \\ w|_{t=0} = \psi(x), & x \in [0, l]; \\ w|_{x=0} = 0, & t \in (0, T]; \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{\alpha}{k}w|_{x=l}, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (1.1)$$

2 Неявная разностная схема

2.1 Построение простейшей неявной разностной схемы

Для построения неявной разностной схемы заменим область непрерывного изменения аргументов функции $w(x, t)$ равномерной сеткой:

$$x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l}{I},$$
$$t_k = kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K}.$$

Произведём замену производных следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{w(x_{i+1}, t_k) - 2w(x_i, t_k) + w(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2};$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w(x_{i+1}, t_k) - w(x_i, t_k)}{h_x};$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w(x_i, t_k) - w(x_i, t_{k-1}))}{h_t}.$$

Начальное условие аппроксимируется следующим образом:

$$w_i^0 = \psi_i, \quad i \in [0, I]. \quad (2.1)$$

Граничные условия аппроксимируются выражениями:

$$w_0^k = 0, \quad k \in [0, K]; \quad (2.2)$$

$$\frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k, \quad k \in [0, K]. \quad (2.3)$$

Чтобы не спутать коэффициент теплопроводности с индексом k , обозначим коэффициент теплопроводности переменной m .

Получим простейшую неявную разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_x^2} \right], \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k, \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие $\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[w]_h - f_h\|_{F_h} = 0$ при произвольном выборе последовательности равномерных сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы будет иметь следующую структуру:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[w]_h - f_h^1 \\ L_h^2[w]_h - f_h^2 \\ L_h^3[w]_h - f_h^3 \\ L_h^4[w]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (2.5) в отдельности.

Проведём разложение по формуле Тейлора значений $w(x_i, t_{k-1})$, $w(x_{i-1}, t_k)$, $w(x_{i+1}, t_k)$ в точке $w(x_i, t_k)$ и учтём эти разложения в выражении невязки для первого соотношения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1 &= \{L_h^1[w]_h - f_h^1\}_{x_i}^{t_k} = \\ &= \left\{ \frac{1}{h_t} \left(w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} - w^{IV}_{tttt} \frac{h_t^4}{24} + O(h_t^5) \right) - \right. \\ &\quad - \frac{m}{ch_x^2} \left(w + w'_x h_x + w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right. \\ &\quad \left. \left. - 2w + w - w'_x h_x + w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} - w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right) \right\}_{x_i}^{t_k} = \\ &= \left\{ w'_t - w''_{tt} \frac{h_t}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^2}{6} - w^{IV}_{tttt} \frac{h_t^3}{24} + O(h_t^4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{c} \left(w''_{xx} + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^2}{12} + O(h_x^3) \right) \right\}_{x_i}^{t_k} = \\ &= O(h_x^2, h_t). \end{aligned}$$

Для остальных компонент невязки будем иметь:

$$\delta f_h^2 = \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{x_i}^{t_0} = w(x_i, t_0) - \psi(x_i) = 0.$$

$$\delta f_h^3 = \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{x_0}^{t_k} = w(x_0, t_k) - 0 = 0.$$

$$\begin{aligned}\delta f_h^4 &= \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{x_I}^{t_k} = \left\{ \frac{1}{h_x} \left(w - w + w'_x h_x - w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - w_{xxxx}^{IV} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right) + \frac{\alpha}{m} w \right\}_{x_I}^{t_k} = \left\{ w'_x - w''_{xx} \frac{h_x}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^2}{6} - w_{xxxx}^{IV} \frac{h_x^3}{24} + \right. \\ &\quad \left. + O(h_x^4) - w'_x \right\}_{x_I}^{t_k} = \left\{ -w''_{xx} \frac{h_x}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^2}{6} - w_{xxxx}^{IV} \frac{h_x^3}{24} + O(h_x^4) \right\}_{x_I}^{t_k} = O(h_x).\end{aligned}$$

Вычислим порядок аппроксимации неявной схемы. Для этого применим равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в схему:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max_{i=1,4} \{\delta f_h^i\} = O(h_t, h_x). \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) сразу вытекает предельное равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = 0.$$

Таким образом, разностная схема (2.4) аппроксимирует исходную задачу (1.1) с первыми порядками относительно h_t и h_x .

Повысим порядок аппроксимации относительно h_x до второго. Рассмотрим подход, изложенный в [3]. Запишем сеточный аналог (2.3) в следующем виде:

$$\frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k + S_I^k, \quad (2.7)$$

где S_I^k - неизвестная сеточная функция, которую будем искать, исходя из требования квадратичной аппроксимации.

Очевидно, что для условия (2.7) невязка может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned}\delta f_h^4 &= \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{x_I}^{t_k} = \left\{ -w''_{xx} \frac{h_x}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^2}{6} - w_{xxxx}^{IV} \frac{h_x^3}{24} + \right. \\ &\quad \left. + O(h_x^4) \right\}_{x_I}^{t_k} - S_I^k.\end{aligned}$$

Квадратичная аппроксимация будет обеспечена, если гарантировать выполнение условия:

$$S_I^k = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h_x}{2}. \quad (2.8)$$

Однако в этом условии фигурирует вторая производная, которая неизвестна. Выразим эту производную из первого уравнения системы (1.1) и учтём её в (2.8). В результате получим:

$$S_I^k = - \left\{ \frac{c}{m} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{h_x}{2} \right\}_{x_I}^{t_k}. \quad (2.9)$$

Производную $\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{x_I, t_k}$ заменим на разностное отношение $\frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t}$.

В результате будем иметь:

$$S_I^k = - \left\{ \frac{c}{m} \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} \frac{h_x}{2} \right\}_{x_I}^{t_k}. \quad (2.10)$$

С учётом (2.10) условие (2.7) примет следующий окончательный вид:

$$\frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = - \frac{\alpha}{m} w_I^k - \left\{ \frac{c}{m} \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} \frac{h_x}{2} \right\}_{x_I}^{t_k}. \quad (2.11)$$

Для условия (2.11) невязка имеет вид:

$$\delta f_h^4 = \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{x_I}^{t_k} = \left\{ w_{xxx}''' \frac{h_x^2}{6} + O(h_x^3) + \frac{c}{m} \left(-w_{tt}'' \frac{h_t h_x}{4} + w_{ttt}''' \frac{h_t^2 h_x}{12} \right) + O(h_t^3 h_x) \right\}_{x_I}^{t_k}.$$

Полученная невязка является квадратичной относительно параметров дискретизации h_t и h_x . Следовательно, если использовать граничное условие (2.11) вместо условия (2.3) в разностной схеме (2.4), то получим разностную схему, которая аппроксимирует исходную задачу (1.1) с первым порядком относительно h_t и со вторым порядком относительно h_x .

Такая разностная схема с граничным условием (2.11) выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_x^2} \right], i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = - \frac{\alpha}{m} w_I^k - \frac{c}{m} \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} \frac{h_x}{2}, \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

2.3 Устойчивость неявной разностной схемы

Пусть правая часть разностной схемы (2.12) получила возмущение.

Тогда разностная схема примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_x^2} \right] + \varphi_i^k, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = \alpha^k, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k - \frac{c}{m} \frac{w_I^k - w_{I-1}^{k-1}}{h_t} \frac{h_x}{2}, \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Разностная схема (2.12) устойчива, если существует $h_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение (2.13) существует и единственно,
2. $\|w_h\|_{W_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}$, где $c - const$.

Существование и единственность решения схемы вытекает из существования и единственности решения, полученного с помощью метода прогонки [4].

Проверим выполнение второго условия.

Определим нормы:

$$\|w_h\|_{W_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=\overline{0, K}}} |w_i^k|;$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i| + \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |\varphi_i^k| + \max_{k=\overline{0, K}} |\alpha^k|.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.13):

$$(1 + 2\gamma)w_i^k = w_i^{k-1} + \gamma(w_{i-1}^k + w_{i+1}^k) + \varphi_i^k h_t, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \quad (2.14)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{mh_t}{ch_x^2}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для (2.14):

$$(1 + 2\gamma)|w_i^k| \leq |w_i^{k-1}| + \gamma(|w_{i-1}^k| + |w_{i+1}^k|) + |\varphi_i^k| h_t; \quad (2.15)$$

Определим следующие оценки:

$$|\alpha^k|, |\varphi_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}; \quad (2.16)$$

$$|w_i^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k|, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}; \quad (2.17)$$

$$|w_i^{k-1}| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}|, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{1, K}. \quad (2.18)$$

Воспользуемся оценками (2.16), (2.17) и (2.18) в соотношении (2.15):

$$(1 + 2\gamma)|w_i^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (2.19)$$

Поскольку правые части соотношения (2.19) не зависят от i , то данное неравенство справедливо для максимальных левых частей по i . В итоге получим:

$$(1 + 2\gamma) \max_{j=\overline{1, I-1}} |w_j^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (2.20)$$

Тогда мы можем расширить диапазон значений по j левой части выражения (2.20), так как эта оценка справедлива при $j = 0$. Исходя из этого неравенство (2.20) примет следующий вид:

$$(1 + 2\gamma) \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (2.21)$$

Перепишем второе граничное условие в более удобном виде:

$$\frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = -\frac{2\alpha}{ch_x} w_I^k - \frac{2m}{ch_x^2} (w_I^k - w_{I-1}^k). \quad (2.22)$$

После преобразований выражения (2.22) получим:

$$w_I^k (1 + 2\gamma + q) = 2\gamma w_{I-1}^k + w_I^{k-1}, \quad (2.23)$$

$$\text{где } q = \frac{2\alpha h_t}{ch_x}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для (2.23):

$$(1 + 2\gamma + q)|w_I^k| \leq 2\gamma |w_{I-1}^k| + |w_I^{k-1}|. \quad (2.24)$$

Воспользуемся оценками (2.16), (2.17) и (2.18) в соотношении (2.24).

Получим:

$$(1 + 2\gamma + q)|w_I^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k|; \quad (2.25)$$

Усилим соотношение (2.25) и отбросим слева q , так как $1 + 2\gamma \leq (1 + 2\gamma + q)$ и получим:

$$(1 + 2\gamma)|w_i^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (2.26)$$

Объединив неравенства (2.21), (2.26) и упростив полученное выражение имеем:

$$\max_{i=0, I} |w_i^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (2.27)$$

Рассмотрим (2.27) при различных значениях k :

$$k = 1: \max_{i=0, I} |w_i^1| \leq \max_{j=0, I} |w_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h};$$

$$k = 2: \max_{i=0, I} |w_i^2| \leq \max_{j=0, I} |w_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h};$$

...

$$\begin{aligned} k = K: \max_{i=0, I} |w_i^K| &\leq \max_{j=0, I} |w_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} \leq \\ &\leq (1 + T) \|f_h\|_{F_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем $\|u_h\|_{U_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}$, где $c = (1 + T)$.

Таким образом, схема (2.12) является безусловно устойчивой.

2.4 Метод прогонки для неявной разностной схемы

В пунктах 2.1 и 2.2 курсовой работы была получена разностная схема (2.12), аппроксимирующая задачу (1.1), которая выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_x^2} \right], i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_{I-1}^k}{h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k - \frac{c}{m} \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} \frac{h_x}{2}, \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right.$$

Эту схему можно привести к общему виду:

$$(1 + 2\gamma)w_i^k = w_i^{k-1} + \gamma(w_{i-1}^k + w_{i+1}^k), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{mh_t}{ch_x^2}.$$

Приведем систему к общему виду с трёхдиагональной матрицей и вектором значений правой части:

$$A_i w_{i+1}^k + B_i w_i^k + C_i w_{i-1}^k = F_i^{k-1},$$

$$\text{где } A_i = C_i = -\gamma, B_i = (1 + 2\gamma), F_i^{k-1} = w_i^{k-1}.$$

Рассчитаем матричные коэффициенты на границах:

$$i = 1: (1 + 2\gamma)w_1^k - \gamma(w_0^k + w_2^k) = w_1^{k-1}.$$

Так как по граничному условию $w_0^k = 0$, то:

$$(1 + 2\gamma)w_1^k - \gamma w_2^k = w_1^{k-1}.$$

Следовательно, матричные коэффициенты и вектор значений правой части в этом случае выглядят так:

$$A_1 = -\gamma, B_1 = 1 + 2\gamma, C_1 = 0, F_1^{k-1} = w_1^{k-1}.$$

Рассчитаем коэффициенты на другом конце:

$$i = I - 1: (1 + 2\gamma)w_{I-1}^k - \gamma(w_{I-2}^k + w_I^k) = w_{I-1}^{k-1}. \quad (2.28)$$

Из второго граничного условия имеем:

$$w_{I-1}^k = w_I^k + \frac{h_x \alpha}{m} w_I^k + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^k - \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1};$$

$$w_{I-1}^k = w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) - \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}.$$

Подставим w_{I-1}^k в уравнение (2.28):

$$(1 + 2\gamma) \left(w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) - \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1} \right) - \gamma(w_{I-2}^k + w_I^k) = w_{I-1}^{k-1}.$$

Следовательно, матричные коэффициенты и вектор значений правой части в этом случае выглядят так:

$$A_{I-1} = (1 + 2\gamma) \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) - \gamma,$$

$$B_{I-1} = 0,$$

$$C_{I-1} = -\gamma,$$

$$F_{I-1}^{k-1} = w_{I-1}^{k-1} + (1 + 2\gamma) \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}.$$

Предположим, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$w_i^k = \alpha_i w_{i+1}^k + \beta_i.$$

Подставим в первый слой по i :

$$\begin{cases} A_1 w_1^k + B_1 w_0^k = F_1^{k-1}, \\ w_0^k = \alpha_0 w_1^k + \beta_0; \end{cases} \quad (2.29)$$

В системе (2.29) подставим второе уравнение в первое и, используя найденные матричные коэффициенты, получим:

$$-\gamma w_1^k + (1 + 2\gamma)(\alpha_0 w_1^k + \beta_0) = F_1^{k-1}.$$

Выразим коэффициенты α_0, β_0 :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\gamma}{1 + 2\gamma}; \\ \beta_0 = \frac{w_1^{k-1}}{1 + 2\gamma}. \end{cases}$$

Рассчитаем значения коэффициентов α_i, β_i для $i = \overline{1, I}$:

$$A_i w_{i+1}^k + B_i w_i^k + C_i (\alpha_{i-1} w_i^k + \beta_{i-1}) = F_i^{k-1},$$

Выразим w_i^k :

$$w_i^k = \frac{F_i^{k-1} - A_i w_{i+1}^k - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}.$$

Следовательно, значения коэффициентов α_i, β_i для $i = \overline{1, I}$:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\frac{A_i}{\alpha_{i-1} C_i + B_i}; \\ \beta_i = \frac{F_i^{k-1} - C_i \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1} C_i + B_i}. \end{cases}$$

Рассчитаем значение w_I^k для расчета обратного хода метода прогонки:

Из второго граничного условия имеем:

$$\begin{aligned} w_{I-1}^k &= w_I^k + \frac{h_x \alpha}{m} w_I^k + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^k - \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}; \\ w_{I-1}^k &= w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) - \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}; \\ w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) &= w_{I-1}^k + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

С помощью рекуррентной формулы выразим $w_{I-1}^k = \alpha_{I-1} w_I^k + \beta_{I-1}$ и подставим в формулу (2.30). Получим:

$$\begin{aligned} w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} \right) &= \alpha_{I-1} w_I^k + \beta_{I-1} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}; \\ w_I^k \left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} - \alpha_{I-1} \right) &= \beta_{I-1} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}; \\ w_I^k &= \frac{\beta_{I-1} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} w_I^{k-1}}{\left(1 + \frac{h_x \alpha}{m} + \frac{ch_x^2}{2mh_t} - \alpha_{I-1} \right)}. \end{aligned}$$

2.5 Исследование сходимости неявной разностной схемы

Так как разностная схема (2.12) аппроксимирует задачу (1.1) на решении w с первым порядком по временному шагу h_t и со вторым порядком по шагу h_x и является абсолютно устойчивой, то решение w_h разностной задачи сходится к решению исходной задачи $[w]_h$, причем скорость сходимости линейная по h_t , и квадратичная по h_x .

3 Разностная схема Кранка-Николсона

3.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсона

Для построения неявной разностной схемы заменим область непрерывного изменения аргументов функции $w(x, t)$ равномерной сеткой:

$$x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l}{I},$$
$$t_k = kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K}.$$

Произведём замену производных следующими разностными отношениями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx \frac{w(x_{i+1}, t_k) - 2w(x_i, t_k) + w(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2};$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w(x_{i+1}, t_k) - w(x_{i-1}, t_k)}{2h_x};$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{w(x_i, t_k) - w(x_i, t_{k-1}))}{h_t}.$$

Начальное условие аппроксимируется следующим образом:

$$w_i^0 = \psi_i, \quad i \in [0, I]; \quad (3.1)$$

Граничные условия аппроксимируются выражениями:

$$w_0^k = 0, \quad k \in [0, K]; \quad (3.2)$$

$$\frac{w_{I+1}^k - w_{I-1}^k}{2h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k, \quad k \in [0, K]. \quad (3.3)$$

Рассмотрим наряду с основными узлами шаблона вспомогательный узел $(x_i, t_k + h_t/2)$. Используя этот узел, запишем уравнения простейших явной и неявной схем.

$$\frac{\widetilde{w}_i - w_i^{k-1}}{h_t/2} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i+1}^{k-1} - 2w_i^{k-1} + w_{i-1}^{k-1}}{h_x^2} \right], \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \quad (3.4)$$

$$\frac{w_i^k - \widetilde{w}_i}{h_t/2} = \frac{m}{c} \left[\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_x^2} \right], \quad i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \quad (3.5)$$

где $\widetilde{w}_i$ – значение решения во вспомогательном узле.

Чтобы не спутать коэффициент теплопроводности с индексом k , обозначим коэффициент теплопроводности переменной m .

Умножим уравнения (3.4) и (3.5) на $1/2$ и сложим их, а также допишем граничные и начальные условия. Таким образом, получим разностную схему Кранка-Николсона:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{2c} \left[\left(\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_x^2} \right) + \left(\frac{w_{i+1}^{k-1} - 2w_i^{k-1} + w_{i-1}^{k-1}}{h_x^2} \right) \right], \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_{I+1}^k - w_{I-1}^k}{2h_x} = -\frac{\alpha}{m} w_I^k, \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Отметим, что значение в дополнительном узле $w(x_{I+1}, t_k)$ не имеет физического смысла. Для его исключения выразим из граничного условия w_{I+1}^k и подставим в первое уравнение системы при $i = I$:

$$w_{I+1}^k = w_{I-1}^k - \frac{2h_x \alpha}{m} w_I^k;$$

$$\frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\left(\frac{w_{I-1}^k - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) + \left(\frac{w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) \right].$$

Таким образом, схема, без фиктивного узла примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{2c} \left[\left(\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_x^2} \right) + \left(\frac{w_{i+1}^{k-1} - 2w_i^{k-1} + w_{i-1}^{k-1}}{h_x^2} \right) \right], \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\left(\frac{w_{I-1}^k - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) + \left(\frac{w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) \right], \quad k = \overline{0, K}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

3.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсона

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие $\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[w]_h - f_h\|_{F_h} = 0$ при произвольном выборе последовательности равномерных сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы (3.6) будет иметь следующую структуру:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[w]_h - f_h^1 \\ L_h^2[w]_h - f_h^2 \\ L_h^3[w]_h - f_h^3 \\ L_h^4[w]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (3.8) в отдельности.

Проведём разложение по формуле Тейлора значений $w(x_i, t_{k-1}), w(x_{i-1}, t_k), w(x_{i+1}, t_k)$ в точке $w(x_i, t_k)$, и значений $w(x_{i-1}, t_{k-1}), w(x_{i+1}, t_{k-1})$ в точке $w(x_i, t_{k-1})$. Учтём эти разложения в выражении невязки для первого соотношения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1 &= \{L_h^1[w]_h - f_h^1\}_{x_i}^{t_k} = \\ &= \left\{ \frac{1}{h_t} \left(w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} + O(h_t^4) \right) \right\}_{x_i}^{t_k} - \\ &- \frac{m}{2ch_x^2} \left\{ \left(w + w'_x h_x + w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right. \right. \\ &- 2w + w - w'_x h_x + w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} - w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) \left. \right\}_{x_i}^{t_k} - \\ &- \frac{m}{2ch_x^2} \left\{ \left(w + w'_x h_x + w''_{xx} h_x^2 + \frac{w'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - 2w + w - \right. \right. \\ &- w'_x h_x + \frac{w''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{w'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \left. \right\}_{x_i}^{t_{k-1}} = \\ &= \left(w'_t - \frac{w''_{tt} h_t}{2} + \frac{w'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) \right)_{x_i}^{t_k} - \\ &- \frac{m}{2c} \left[\left(w''_{xx} + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^2}{12} + O(h_x^3) \right)_{x_i}^{t_k} + \left(w''_{xx} + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^2}{12} + O(h_x^3) \right)_{x_i}^{t_{k-1}} \right] = \\ &= w'_t - \frac{w''_{tt} h_t}{2} + \frac{w'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{m}{2c} \left(w''_{xx} + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^2}{12} + O(h_x^3) + w''_{xx} - \right. \\ &- w'''_{xxt} h_t + O(h_t^2) + \frac{w^{IV}_{xxxx} h_x^2}{12} - \frac{w^{(5)}_{xxxxt} h_x^2 h_t}{12} + O(h_x^3, h_t^2) \left. \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w'_t - \frac{w''_{tt}h_t}{2} + \frac{w'''_{ttt}h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{m}{2c} \left(2w''_{xx} + \frac{w''''_{xxx}h_x^2}{6} - w'''_{xxt}h_t - \right. \\
&\quad \left. - \frac{w^{(5)}_{xxxxt}h_x^2h_t}{12} + O(h_t^2) + O(h_x^3) + O(h_x^3, h_t^2) \right) = \\
&= \frac{w'''_{ttt}h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{m}{2c} \left(\frac{w''''_{xxx}h_x^2}{6} - \frac{w^{(5)}_{xxxxt}h_x^2h_t}{12} + O(h_t^2) + O(h_x^3) + \right. \\
&\quad \left. + O(h_x^3, h_t^2) \right) = O(h_x^2, h_t^2).
\end{aligned}$$

Для остальных компонент невязки будем иметь:

$$\delta f_h^2 = \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{x_i}^{t_0} = w(x_i, t_0) - \psi(x_i) = 0.$$

$$\delta f_h^3 = \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{x_0}^{t_k} = w(x_0, t_k) - 0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\delta f_h^4 &= \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{x_l}^{t_k} = \left\{ \frac{1}{2h_x} \left(w + w'_x h_x + w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + O(h_x^5) - w + w'_x h_x - w''_{xx} \frac{h_x^2}{2} + w'''_{xxx} \frac{h_x^3}{6} - w^{IV}_{xxxx} \frac{h_x^4}{24} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + O(h_x^5) \right) + \frac{\alpha}{m} w \right\}_{x_l}^{t_k} = \left\{ w'_x + w'''_{xxx} \frac{h_x^2}{6} + O(h_x^3) - w'_x \right\}_{x_l}^{t_k} = O(h_x^2).
\end{aligned}$$

Вычислим порядок аппроксимации схемы Кранка-Николсона. Для этого применим равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в схему:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max_{i=1,4} \{\delta f_h^i\} = O(h_t^2, h_x^2). \quad (3.9)$$

Из формулы (3.9) сразу вытекает предельное равенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = 0.$$

Таким образом, разностная схема (3.6) аппроксимирует исходную задачу (1.1) со вторыми порядками относительно h_t и h_x .

3.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсона

Пусть правая часть разностной схемы (3.7) получила возмущение.

Тогда разностная схема примет вид:

$$\begin{cases} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{2c} \left[\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_x^2} + \frac{w_{i+1}^{k-1} - 2w_i^{k-1} + w_{i-1}^{k-1}}{h_x^2} \right] + \varphi_i^k, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = \alpha^k, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left[\left(\frac{w_{I-1}^k - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) + \left(\frac{w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right)}{h_x^2} \right) \right], k = \overline{0, K}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Разностная схема (3.6) устойчива, если существует $h_0 > 0$ и $c > 0$ такие, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение (3.10) существует и единственно,
2. $\|w_h\|_{W_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}$, где $c - const$.

Существование и единственность решения схемы вытекает из существования и единственности решения, полученного с помощью метода прогонки [4].

Определим нормы:

$$\|w_h\|_{W_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=\overline{0, K}}} |w_i^k|;$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i| + \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |\varphi_i^k| + \max_{k=\overline{0, K}} |\alpha^k|.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (3.10):

$$(1 + 2\gamma)w_i^k = (1 - 2\gamma)w_i^{k-1} + \gamma(w_{i-1}^k + w_{i+1}^k + w_{i-1}^{k-1} + w_{i+1}^{k-1}) + \varphi_i^k h_t, \\ i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \quad (3.11)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{mh_t}{2ch_x^2}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для (3.11):

$$(1 + 2\gamma)|w_i^k| \leq |1 - 2\gamma||w_i^{k-1}| + \gamma(|w_{i-1}^k| + |w_{i+1}^k| + |w_{i-1}^{k-1}| + |w_{i+1}^{k-1}|) + |\varphi_i^k| h_t \quad (3.12)$$

Определим следующие оценки:

$$|\alpha^k|, |\varphi_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}; \quad (3.13)$$

$$|w_i^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k|, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}. \quad (3.14)$$

$$|w_i^{k-1}| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}|, \quad i = \overline{0, I}, k = \overline{1, K}. \quad (3.15)$$

Воспользуемся оценками (3.13), (3.14), (3.15) в соотношении (3.12):

$$(1 + 2\gamma)|w_i^k| \leq |1 - 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + \\ + 2\gamma \left(\max_{j=0, I} |w_j^k| + \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| \right) + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.16)$$

Поскольку правые части соотношения (3.16) не зависят от i , то данное неравенство справедливо для максимальных левых частей по i . В итоге получим:

$$(1 + 2\gamma) \max_{j=1, I-1} |w_j^k| \leq |1 - 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + \\ + 2\gamma \left(\max_{j=0, I} |w_j^k| + \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| \right) + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.17)$$

С целью упрощения потребуем, выполнение условия $1 - 2\gamma \geq 0$ для (3.17), в результате получим:

$$(1 + 2\gamma) \max_{j=1, I-1} |w_j^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.18)$$

Тогда мы можем расширить диапазон значений по j левой части выражения (3.18), так как эта оценка справедлива при $j = 0$. Исходя из этого неравенство (3.18) примет следующий вид:

$$(1 + 2\gamma) \max_{j=0, I-1} |w_j^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.19)$$

Перепишем второе граничное условие в более удобном виде:

$$w_I^k \left(1 + 2\gamma \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) = 2\gamma w_{I-1}^k + 2\gamma w_{I-1}^{k-1} - 2\gamma \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) w_I^{k-1}, \quad (3.20)$$

Воспользуемся неравенством треугольника для (3.20):

$$\left(1 + 2\gamma \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) |w_I^k| \leq 2\gamma |w_{I-1}^k| + 2\gamma |w_{I-1}^{k-1}| - \left(1 - 2\gamma \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) |w_I^{k-1}|. \quad (3.21)$$

Воспользуемся оценками (3.13), (3.14) и (3.15) в соотношении (3.21). Получим:

$$\left(1 + 2\gamma \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) |w_I^k| \leq$$

$$\leq 2\gamma \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^k| + \left(1 - \frac{2\gamma\alpha h_x}{m}\right) \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^{k-1}|. \quad (3.22)$$

Усилим соотношение (3.22):

$$(1 + 2\gamma) |w_I^k| \leq 2\gamma \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^k| + \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}. \quad (3.23)$$

Объединим неравенства (3.23), (3.19) и упростим полученное выражение. Получим:

$$\max_{i=0,\overline{I}} |w_i^k| \leq \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}; \quad (3.24)$$

Рассмотрим (3.24) при различных значениях k :

$$k = 1: \max_{i=0,\overline{I}} |w_i^1| \leq \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h};$$

$$k = 2: \max_{i=0,\overline{I}} |w_i^2| \leq \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h};$$

...

$$k = K: \max_{i=0,\overline{I}} |w_i^K| \leq \max_{j=0,\overline{I}} |w_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} \leq \\ \leq (1 + T) \|f_h\|_{F_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}.$$

Следовательно, получаем $\|w_h\|_{W_h} \leq c \|f_h\|_{F_h}$, где $c = (1 + T)$.

Таким образом, схема (3.6) является устойчивой при выполнении $1 - 2\gamma \geq 0$.

3.4 Метод прогонки для схемы Кранка-Николсона

В пунктах 3.1 и 3.2 курсовой работы была получена разностная схема, аппроксимирующая задачу (1.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{2c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_x^2} + \frac{w_{i-1}^{k-1} - 2w_i^{k-1} + w_{i+1}^{k-1}}{h_x^2} \right], i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}; \\ w_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ w_0^k = 0, \quad k = \overline{0, K}; \\ \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{m}{c} \left(\frac{w_{I-1}^k - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) + w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right)}{h_x^2} \right), \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Эту схему можно привести к общему виду:

$$(1 + 2\gamma) w_i^k = (1 - 2\gamma) w_i^{k-1} + \gamma (w_{i-1}^k + w_{i+1}^k + w_{i-1}^{k-1} + w_{i+1}^{k-1}), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K},$$

где $\gamma = \frac{mh_t}{2ch_x^2}$.

Приведем систему к общему виду с трёхдиагональной матрицей и вектором значений правой части:

$$A_i w_{i+1}^k + B_i w_i^k + C_i w_{i-1}^k = F_i^{k-1},$$

где $A_i = C_i = -\gamma$, $B_i = (1 + 2\gamma)$, $F_i^{k-1} = w_i^{k-1} + \gamma(w_{i-1}^{k-1} + w_{i+1}^{k-1} - 2w_i^{k-1})$.

Рассчитаем матричные коэффициенты на границах:

$$i = 1: (1 + 2\gamma)w_1^k - \gamma(w_0^k + w_2^k + w_0^{k-1} + w_2^{k-1}) = (1 - 2\gamma)w_1^{k-1}.$$

Так как по граничному условию $w_0^k = 0$, то:

$$(1 + 2\gamma)w_1^k - \gamma(w_2^k + w_2^{k-1}) = (1 - 2\gamma)w_1^{k-1}.$$

Следовательно, матричные коэффициенты и вектор значений правой части в этом случае выглядят так:

$$A_1 = -\gamma, B_1 = 1 + 2\gamma, C_1 = 0, F_1^{k-1} = w_1^{k-1} + \gamma(w_2^{k-1} - 2w_1^{k-1}).$$

Рассчитаем коэффициенты на другом конце:

$$i = I - 1: w_{I-1}^k = \gamma(w_I^k - 2w_{I-1}^k + w_{I-2}^k + w_I^{k-1} - 2w_{I-1}^{k-1} + w_{I-2}^{k-1}) + w_{I-1}^{k-1}.$$

Из второго граничного условия имеем:

$$w_{I-1}^k = \frac{ch_x^2}{mh_t}(w_I^k - w_I^{k-1}) + w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) - w_{I-1}^{k-1} + w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right).$$

Подставим w_{I-1}^k в основное уравнение схемы при $i = I - 1$:

$$(1 + 2\gamma) \left(\frac{ch_x^2}{mh_t}(w_I^k - w_I^{k-1}) + w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) - w_{I-1}^{k-1} + w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) \right) = \gamma(w_I^k + w_{I-1}^k + w_I^{k-1} - 2w_{I-1}^{k-1} + w_{I-2}^{k-1}) + w_{I-1}^{k-1}.$$

Следовательно, матричные коэффициенты и вектор значений правой части в этом случае выглядят так:

$$A_{I-1} = \frac{(1 + 2\gamma)ch_x^2}{mh_t} + (1 + 2\gamma) \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) - \gamma,$$

$$B_{I-1} = 0,$$

$$C_{I-1} = -\gamma,$$

$$F_{I-1}^{k-1} = \gamma(w_I^{k-1} - 2w_{I-1}^{k-1} + w_{I-2}^{k-1}) + w_{I-1}^{k-1} + \frac{(1+2\gamma)ch_x^2}{mh_t} w_I^{k-1} + (1 + 2\gamma)w_{I-1}^{k-1} - (1 + 2\gamma)\left(1 + \frac{\alpha h_x}{m}\right) w_I^{k-1}.$$

Предположим, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$w_i^k = \alpha_i w_{i+1}^k + \beta_i.$$

Подставим в первый слой по i :

$$\begin{cases} A_1 w_1^k + B_1 w_0^k = F_1^{k-1}, \\ w_0^k = \alpha_0 w_1^k + \beta_0; \end{cases} \quad (3.26)$$

В системе (3.26) подставим второе уравнение в первое и, используя найденные матричные коэффициенты, получим:

$$-\gamma w_1^k + (1 + 2\gamma)(\alpha_0 w_1^k + \beta_0) = F_1^{k-1}.$$

Выразим коэффициенты α_0, β_0 :

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\gamma}{1 + 2\gamma}; \\ \beta_0 = \frac{w_1^{k-1} + \gamma(w_2^{k-1} - 2w_1^{k-1})}{1 + 2\gamma}. \end{cases}$$

Рассчитаем значения коэффициентов α_i, β_i для $i = \overline{1, I}$:

$$A_i w_{i+1}^k + B_i w_i^k + C_i(\alpha_{i-1} w_i^k + \beta_{i-1}) = F_i^{k-1},$$

Выразим w_i^k :

$$w_i^k = \frac{F_i^{k-1} - A_i w_{i+1}^k - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}.$$

Следовательно, значения коэффициентов α_i, β_i для $i = \overline{1, I}$:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\frac{A_i}{\alpha_{i-1} C_i + B_i}; \\ \beta_i = \frac{F_i^{k-1} - C_i \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1} C_i + B_i}. \end{cases}$$

Рассчитаем значение w_I^k для расчета обратного хода метода прогонки:

Из второго граничного условия имеем:

$$w_I^k = \frac{mh_t}{ch_x^2} \left(w_{I-1}^k - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) + w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) + w_I^{k-1}. \quad (3.27)$$

С помощью рекуррентной формулы выразим $w_{I-1}^k = \alpha_{I-1} w_I^k + \beta_{I-1}$ и подставим в формулу (3.27). Получим:

$$w_I^k = \frac{mh_t}{ch_x^2} \left(\alpha_{I-1} w_I^k + \beta_{I-1} - w_I^k \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) + w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) + w_I^{k-1}.$$

$$w_I^k \left(1 + \frac{mh_t}{ch_x^2} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} - \alpha_{I-1} \right) \right) = \frac{mh_t}{ch_x^2} \left(\beta_{I-1} + w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) + w_I^{k-1};$$

$$w_I^k = \frac{\frac{mh_t}{ch_x^2} \left(\beta_{I-1} + w_{I-1}^{k-1} - w_I^{k-1} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} \right) \right) + w_I^{k-1}}{1 + \frac{mh_t}{ch_x^2} \left(1 + \frac{\alpha h_x}{m} - \alpha_{I-1} \right)}.$$

3.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсона

Поскольку разностная схема Кранка-Николсона аппроксимирует задачу (1.1) с погрешностью $\|\delta f_h\|_{F_h} = O(h_t^2, h_x^2)$ и условно устойчива, следовательно, схема сходится к решению этой задачи при выполнении условия $1 - \frac{mh_t}{ch_x^2} \geq 0$, причём скорость сходимости является квадратичной по обоим шагам сетки.

4 Описание программы

Для решения задачи теплопроводности в тонком однородном стержне была разработана программа на языке программирования Python 3.6.

Программа позволяет визуализировать результаты аналитического и численного решения поставленной задачи. Оценивать количество слагаемых для контроля погрешности усечения ряда, исследовать погрешность и сходимость сеточного решения к точному.

Для удобства использования приложения был написан графический интерфейс с помощью пакета PyQt5. На рисунке 1 изображён графический интерфейс приложения.

Распределение температуры в стержне

Процесс теплопередачи в стержне

Длина стержня: 2

Коэффициент теплопроводности: 0.04

Коэффициент объёмной теплоёмкости: 2

Момент времени: q

Коэффициент теплообмена: 0.01

Температура окружающей среды: 0

Количество суммирований ряда: 300

Погрешность:

I_N: 100

K_N: 100

I_Krank: 100

K_Krank: 100

Заккрыть ОК

Рисунок 1 – Графический интерфейс приложения

Для удобства в поля ввода добавлены параметры по умолчанию и обработчик ошибок для случаев, когда пользователь вводит неправильные данные.

Приведём примеры решений, полученных с помощью неявной разностной схемы и разностной схемы Кранка-Николсона, а также сравним эти решения с аналитическим решением.

На рисунках 2,3,4 приведены графики зависимости температуры от длины стержня для обеих схем и аналитического решения.

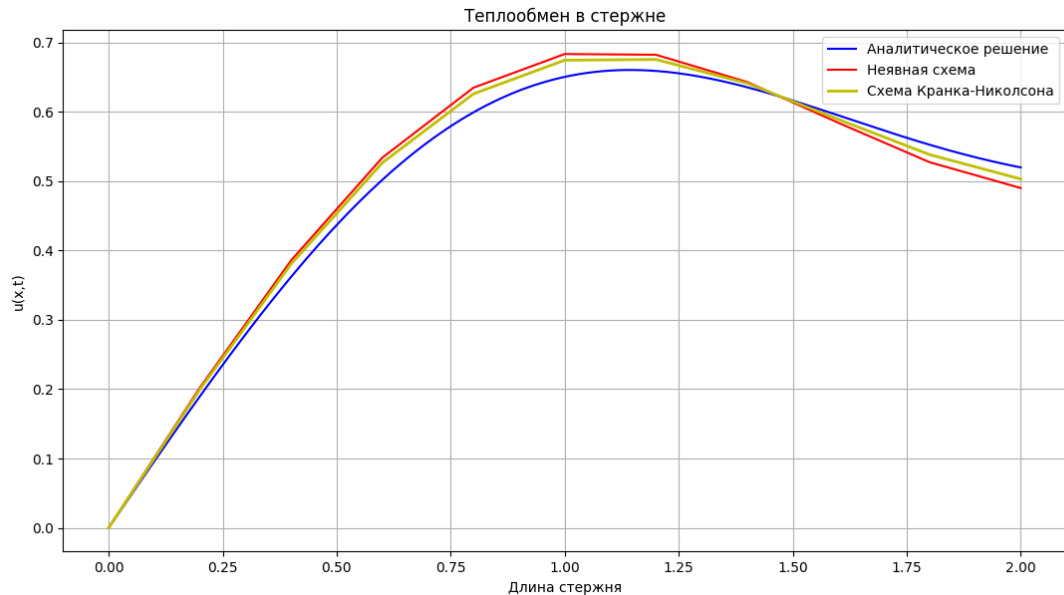


Рисунок 2 – График распределения температуры при $t = 10$, $I = 10$, $K = 10$

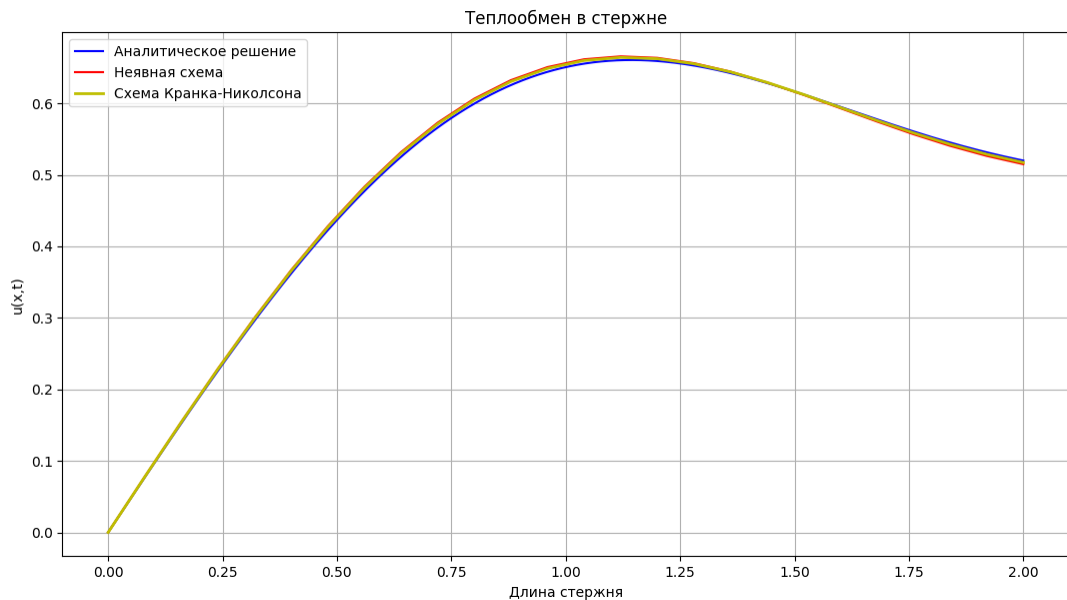


Рисунок 3 – График распределения температуры при $t = 10$, $I = 25$, $K = 50$

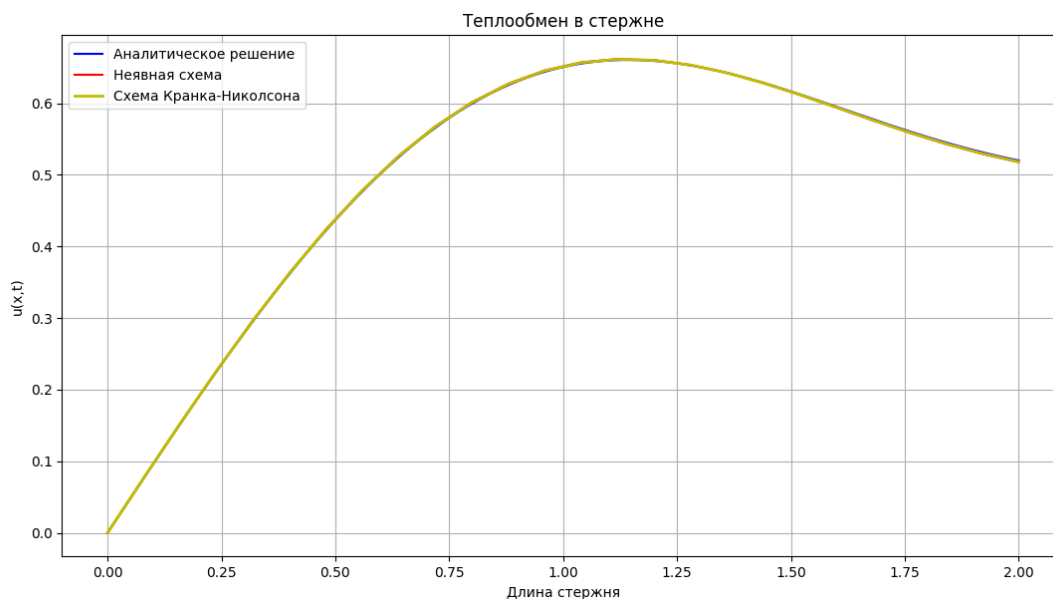


Рисунок 4 – График распределения температуры при $t = 10$, $I = 25$, $K = 200$

Исходя из результатов работы программы, показанных на рисунке 2, будем измельчать сетку. Как видно из рисунков 3 и 4, при увеличении количества интервалов дробления заметна визуальная сходимость. При этом визуальная сходимость неявной разностной схемы имеет меньшую скорость сходимости, чем схема Кранка-Николсона.

5 Исследование погрешности с помощью вычислительного эксперимента

Неявная разностная схема аппроксимирует исходную задачу с первым порядком по временному шагу h_t и со вторым порядком по пространственному шагу h_x .

Схема Кранка-Николсона аппроксимирует исходную задачу со вторыми порядками относительно шагов h_t и h_x .

Ошибку между аналитическим и численным решениями определим следующей величиной:

$$\varepsilon(h_x, h_t) = \max_{\substack{i=\overline{0,I} \\ k=\overline{0,K}}} |u_i^k - u(x_i, t_k)|, \quad (5.1)$$

где $u(x_i, t_k)$ – значение аналитического решения в узле сетки x_i, t_k .

Для исследования неявной схемы будем использовать следующий алгоритм: получим сетку, вычислим аналитическое решение и сеточное решение в каждой точке сетки, рассчитаем погрешность по формуле (5.1), затем уменьшим шаг вдвое по пространственной координате, и в 4 раза по временной и снова посчитаем погрешность. При достаточно малых шагах сетки для полученных погрешностей будет справедливо следующее неравенство:

$$\varepsilon_{4h_t, 2h_x} / \varepsilon_{h_t, h_x} \approx 4.$$

Для исследования схемы Кранка-Николсона будем использовать следующий алгоритм: получим сетку, вычислим аналитическое решение и сеточное решение в каждой точке сетки, рассчитаем погрешность по формуле (5.1), затем уменьшим шаг вдвое и по пространственной координате и по временной и снова посчитаем погрешность. При достаточно малых шагах сетки для полученных погрешностей будет справедливо следующее неравенство:

$$\varepsilon_{2h_t, 2h_x} / \varepsilon_{h_t, h_x} \approx 4.$$

Результаты исследования погрешности представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 - Результаты вычислительного эксперимента для неявной схемы

I	K	h_x	h_t	ε_{h_t, h_x}	$\varepsilon_{h_t, h_x} / \varepsilon_{\frac{h_t}{4}, \frac{h_x}{2}}$
4	10	0,5	0,5	0,09656	-
8	40	0,25	0,125	0,05625	1,7165
16	160	0,125	0,0625	0,03104	1,81229
32	640	0,0625	0,015625	0,01665	1,86324
64	2560	0,03125	0,0039063	0,00869	1,91795

Таблица 2 - Результаты вычислительного эксперимента для схемы Кранка-Николсона

I	K	h_x	h_t	ε_{h_t, h_x}	$\varepsilon_{h_t, h_x} / \varepsilon_{\frac{h_t}{2}, \frac{h_x}{2}}$
4	10	0,5	0,5	0,09049	-
8	20	0,25	0,25	0,05311	1,70372
16	40	0,125	0,125	0,0274	1,93778
32	80	0,0625	0,0625	0,01087	2,52110
64	160	0,03125	0,03125	0,00285	3,81634

Из таблиц 1 и 2 видно, что результаты вычислительного эксперимента для обеих схем не совпали с теоретическими ожидаемыми результатами (в таблице 2 представлены наилучшие результаты, которых удалось добиться). Это связано с тем, что производная начальной функции терпит разрыв в граничном условии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в тонком однородном стержне. Для численного решения краевой задачи построены две разностные схемы: схема Кранка-Николсона и неявная разностная схема.

Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что схема Кранка-Николсона аппроксимирует исходную краевую задачи со вторыми порядками относительно шагов сетки, а неявная разностная схема с первым порядком по шагу h_t и со вторым порядком по шагу h_x . Также в результате исследования установлено, что схема Кранка-Николсона является условно устойчивой, а неявная схема абсолютно устойчивой.

Для проверки фактической сходимости разностных схем был использован тестовый пример. Высокоточное решение тестовой задачи получено методом разделения переменных в виде ряда Фурье. Для контроля погрешности аналитического решения использована оценка остатка ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что фактическая погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью обеих схем, убывает с измельчением шагов сетки при соблюдении условий устойчивости. При этом порядки убывания погрешности численного решения для обеих схем оказались ниже порядков, полученных при теоретическом исследовании. Это связано с тем, что производная начальной функции терпит разрыв в граничном условии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов - М.: Наука, 1974.-Т. 2. - 479 с.
2. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики: учеб. Пособие для университетов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. - М.: Наука, 1972 –736 с.
3. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики: учеб. Для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. - М.: Физико-математическая литература, 2000 - 399 с.
4. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 5-е изд. - М. : Бином. Лаб. знаний , 2007 - 636 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы на языке Python

```
# Метод Ньютона
def newtons_method(x0, f, f1, e):
    x0 = float(x0)
    while True:
        x1 = x0 - (f(x0, b) / f1(x0, b))
        if abs(x1 - x0) < e:
            return x1
        x0 = x1

#Вычисление гаммы для неявной схемы
def get_gamma(const_h_t, const_h_x, const_m, const_c):
    return const_h_t * const_m / ((const_h_x ** 2) * const_c)

#Прогонка для Неявной схемы
def alg(h_t, h_x, t):
    alpha = alp
    m = k
    x = np.arange(0, 1 + h_x, h_x)
    values = np.sin(pi * x / 1)
    coefficients = [[0] * 2] * (len(x) - 1)
    gamma = get_gamma(h_t, h_x, m, c)
    for temp in np.arange(1, len(np.arange(0, t + h_t, h_t)), 1):
        for i in np.arange(0, len(x), 1):
            if i == 0:
                coefficients[i] = [0, 0]
                values[i] = 0
            elif i == len(x) - 1:
                values[i] = (coefficients[i - 1][1] + ((c * h_x ** 2 * values[i]) / (2 * m *
h_t))) / (
                    1 - coefficients[i - 1][0] + alpha * (h_x / m) + ((c * h_x ** 2) / (2
* m * h_t)))
            else:
                if i == 1:
                    coefficients[i] = [-(gamma) / (1 + 2 * gamma), ((values[i]) / (1 + 2 *
gamma))]
                elif i == len(x) - 2:
                    A = (1 + 2 * gamma) * (1 + (h_x * alpha / m) + c * (h_x ** 2) / (2 * m *
h_t)) - gamma
                    B = 0
                    C = - gamma
                    F = values[i] + ((1 + 2 * gamma) * (c * h_x ** 2) * values[i + 1] / (2 * m
* h_t))
                    coefficients[i] = [(-A / (B + C * coefficients[i - 1][0])),
((F - C * coefficients[i - 1][1]) / (B + C *
coefficients[i - 1][0]))]
                else:
                    A = - gamma
                    B = 1 + 2 * gamma
                    C = - gamma
                    F = values[i]
                    Alpha = - (A / (B + C * coefficients[i - 1][0]))
                    Betta = ((F - C * coefficients[i - 1][1]) / (B + C * coefficients[i -
1][0]))
                    coefficients[i] = [Alpha, Betta]
        for i in np.arange(len(x) - 2, -1, -1):
            values[i] = coefficients[i][0] * values[i + 1] + coefficients[i][1]
    return values + u0

#Прогонка для схемы с линейным порядком
def alg_common(h_t, h_x, t):
    x = np.arange(0, 1 + h_x, h_x)
    values = np.sin(pi * x / 1)
    coefficients = [[0] * 2] * (len(x) - 1)
    gamma = get_gamma(h_t, h_x, k, c)
```

```

for temp in np.arange(1, len(np.arange(0, t, h_t)), 1):
    for i in np.arange(0, len(x), 1):
        if i == 0:
            coefficients[i] = [0, 0]
            values[i] = 0
        elif i == len(x) - 1:
            values[i] = coefficients[i - 1][1] / (1 - coefficients[i - 1][0] + alp * h_x /
k)
        else:
            if i == 1:
                coefficients[i] = [-((-gamma) / (1 + 2 * gamma)), ((values[i]) / (1 + 2 *
gamma)))]
            elif i == len(x) - 2:
                coefficients[i] = [
                    -(((1 + 2 * gamma) * (1 + alp * h_x / k) - gamma) / (-gamma *
coefficients[i - 1][0])),
                    ((values[i] - (-gamma) * coefficients[i - 1][1]) / (-gamma *
coefficients[i - 1][0]))]
            else:
                A = - gamma
                B = 1 + 2 * gamma
                C = - gamma
                F = values[i]
                Alpha = - (A / (B + C * coefficients[i - 1][0]))
                Betta = ((F - C * coefficients[i - 1][1]) / (B + C * coefficients[i -
1][0]))
                coefficients[i] = [Alpha, Betta]
            for i in np.arange(len(x) - 2, -1, -1):
                values[i] = coefficients[i][0] * values[i + 1] + coefficients[i][1]
    return values + u0

#Прогонка для схемы Кранка-Николсона
def alg_crank(h_t, h_x, t):
    max_eps = 0
    alpha = alp
    m = k
    c = 2
    x = np.arange(0, 1 + h_x, h_x)
    values = np.sin(pi * x / 1)
    coefficients = [[0] * 2] * (len(x) - 1)
    gamma = get_gamma(h_t, h_x, m, c) / 2
    for temp in np.arange(1, len(np.arange(0, t, h_t)), 1):
        for i in np.arange(0, len(x), 1):
            if i == 0:
                coefficients[i] = [0, 0]
                values[i] = 0
            elif i == len(x) - 1:
                kf1 = m * h_t / (c * h_x ** 2)
                kf2 = (1 + (alpha * h_x / m))
                up_val = kf1 * (coefficients[i - 1][1] + values[i - 1] - values[i] * kf2) +
values[i]
                down_val = 1 + kf1 * kf2 - kf1 * coefficients[i - 1][0]
                values[i] = up_val / down_val
            else:
                if i == 1:
                    coefficients[i] = [-((-gamma) / (1 + 2 * gamma)), (
                        (values[i] + gamma * (values[i + 1] - 2 * values[i])) / (1 + 2 *
gamma)))]
                elif i == len(x) - 2:
                    kf1 = m * h_t / (c * h_x ** 2)
                    kf2 = (1 + (alpha * h_x / m))
                    A = (1 + 2 * gamma) * (1 / kf1) + (1 + 2 * gamma) * kf2 - gamma
                    B = 0
                    C = - gamma
                    F = gamma * (values[i + 1] - 2 * values[i] + values[i - 1]) + values[i] +
(
                        1 + 2 * gamma) * (1 / kf1) * values[i + 1] + (1 + 2 * gamma) *
values[i] - (

```

```

        1 + 2 * gamma) * kf2 * values[i + 1]
coefficients[i] = [(-A / (B + C * coefficients[i - 1][0])),
                  ((F - C * coefficients[i - 1][1]) / (B + C *
coefficients[i - 1][0]))]
    else:
        A = - gamma
        B = 1 + 2 * gamma
        C = - gamma
        F = values[i] + gamma * (values[i + 1] - 2 * values[i] + values[i - 1])
        Alpha = - (A / (B + C * coefficients[i - 1][0]))
        Betta = ((F - C * coefficients[i - 1][1]) / (B + C * coefficients[i -
1][0]))
        coefficients[i] = [Alpha, Betta]
    for i in np.arange(len(x) - 2, -1, -1):
        values[i] = coefficients[i][0] * values[i + 1] + coefficients[i][1]
    for i in np.arange(0, len(values), 1):
        diff = abs(values[i] + u0 - Fourier_series(mu, l, k, c, x[i], temp, n, u0))
        if diff > max_eps:
            max_eps = diff
    return values + u0

#Вычисление аналитического решения в точке
def Fourier_series(mu, l, k, c, x, t, n, u0):
    suma = 0
    for i in range(n):
        suma = suma + ((4 * pi * mu[i] * sin(mu[i])) * sin(mu[i] * x / l) * exp(
            (-k * mu[i] * mu[i] * t) / (c * l * l))) / (
            (pi * pi - mu[i] * mu[i]) * (2 * mu[i] - sin(2 * mu[i])))
    return suma + u0

```