

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рекомендовано редакционно-издательской комиссией Института информатики, математики и электроники в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программе высшего образования по направлению 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика»

САМАРА

2017

Составитель А. А. Дегтярев

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А. Ю. Привалов

Аналитическое решение краевых задач математической физики:
методические указания / сост. А. А. Дегтярев. – Самара: Изд-во
Самар. ун-та, 2017. – 60 с.: 10 ил.

Содержат следующие сведения и материалы, необходимые для выполнения курсовой работы по дисциплине «Уравнения математической физики»: цель курсовой работы; задание и варианты краевых задач математической физики; методические рекомендации по выполнению курсовой работы; теоретические сведения; требования к компьютерным программам; требования к оформлению отчета по курсовой работе; примеры оформления таких частей отчета, как реферат, содержание, введение, заключение.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика». Также будут полезны студентам, обучающимся по направлению «Прикладная математика и физика», при изучении курса «Уравнения математической физики».

Разработано на кафедре технической кибернетики.

Содержание

Введение	4
1 Тема и цель курсовой работы. Исходные данные и задание к курсовой работе	5
2 Рекомендации по выполнению курсовой работы	6
3 Основные требования к выполнению курсовой работы	9
3.1 Требования к компьютерным программам	9
3.2 Требования к оформлению отчета по курсовой работе	9
4 Теоретические сведения	10
4.1 Метод разделения переменных	10
4.2 Методы решения нелинейных уравнений	17
4.3 Вычисление интегралов с помощью приближенных квадратурных формул	19
4.4 Суммирование рядов	20
4.5 Особенности построения математической модели для краевых задач в полярной системе координат при условии осевой симметрии	21
5 Варианты заданий к курсовой работе	23
Список литературы	53
Приложение А Структура отчета по курсовой работе	54
Приложение Б Пример оформления титульного листа отчета по курсовой работе	55
Приложение В Пример составления реферата	56
Приложение Г Пример содержания отчета по курсовой работе	57
Приложение Д Пример введения для отчета по курсовой работе	57
Приложение Е Пример заключения для отчета по курсовой работе	59

Введение

Аналитические методы решения уравнений математической физики широко применяются на практике для получения лаконичного формульного описания важнейших характеристик самых разнообразных процессов и явлений. Такое описание зачастую оказывается весьма удобным как для теоретического исследования свойств изучаемых процессов, так и для их численного моделирования на компьютерах. Для некоторых классов задач математической физики аналитические формы решений открывают возможности эффективного распараллеливания вычислительного алгоритма.

В то же время следует отметить относительно невысокую универсальность аналитических методов в сравнении, например, с вариационными или численными. Каждый из них ориентирован на довольно узкий класс задач и в рамках этого класса может прекрасно конкурировать и заметно превосходить численные методы. За пределами этого класса его применение становится проблематичным. Например, чрезвычайно редко удается успешно применить аналитический метод для решения нелинейных задач математической физики или задач с переменными операторными коэффициентами. Для решения последних часто применяют численные методы: метод конечных разностей, вариационно-разностные, проекционно-разностные методы.

Изучение методов решения уравнений математической физики малоэффективно без их практического применения для решения конкретных задач.

В настоящей методической разработке приведены задания и рекомендации по выполнению курсовой работы, направленной на практическое освоение метода разделения переменных (метода Фурье). Приведены теоретические сведения, а также свыше тридцати вариантов конкретных краевых задач математической физики для их решения в рамках курсовой работы.

1 Тема и цель курсовой работы.

Исходные данные и задание к курсовой работе

Тема: Аналитическое решение краевых задач математической физики.

Цель курсовой работы – получение решения краевой задачи математической физики в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа и создание компьютерной программы для расчета функции-решения с заданной точностью.

Исходные данные – вариант работы (выбирается студентом из комплекта вариантов, предоставленных преподавателем), значения физических и геометрических параметров (задаются преподавателем после получения студентом общей формы решения задачи в виде ряда Фурье).

Задание к курсовой работе

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Используя метод разделения переменных (метод Фурье) получить решение краевой задачи в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, соответствующим краевым условиям задачи.
3. Исследовать сходимость ряда Фурье, получить оценку остатка ряда.
4. Разработать компьютерную программу расчета функции-решения краевой задачи (суммирования ряда Фурье) с требуемой точностью. При расчете коэффициентов ряда использовать метод численного интегрирования, если это необходимо. Обеспечить контроль погрешности численного интегрирования. Если необходимо, то разработать специальный программный модуль для вычисления используемых собственных чисел оператора Лапласа. Обеспечить контроль погрешности вычисления собственных чисел. Компьютерная программа должна обеспечивать возможность диалогового режима ввода физических, геометрических параметров задачи, числа суммируемых элементов ряда, графическую визуализацию рассчитанного решения задачи.
5. Используя разработанную программу, провести экспериментальное исследование качества полученной аналитической оценки остатка ряда Фурье.

6. Оформить отчет о выполненной курсовой работе в соответствии с требованиями, изложенными в подразделе 3.2 настоящих методических указаний.

2 Рекомендации по выполнению курсовой работы

На первом консультационном занятии по выполнению курсовой работы каждый из студентов получает вариант задачи математической физики. При этом предложенный вариант задачи содержит, как правило, лишь словесное описание некоторого физического процесса или явления. Поэтому в первую очередь необходимо выполнить работу по формализации физического явления, которая должна завершиться чёткой математической постановкой краевой задачи математической физики. Иначе говоря, в результате выполнения этапа формализации должна быть получена математическая модель физического процесса в виде замкнутой системы соотношений, содержащих дифференциальное уравнение в частных производных и соответствующий набор краевых условий. Выбор краевых (граничных, начальных) условий должен быть обоснован. Их вид не должен противоречить описанию физического процесса. При формировании математической модели физического процесса рекомендуется обратиться к лекциям и учебникам по курсу «Уравнения математической физики», например [1]. Некоторые вопросы, связанные с построением математической модели в полярной, цилиндрической и сферической системах координат, рассмотрены в подразделе 4.5 настоящих методических указаний.

В различных вариантах заданий к курсовой работе для решения краевых задач математической физики предложено использовать метод разделения переменных (метод Фурье). Студент по согласованию с преподавателем вправе использовать альтернативный аналитический метод. При этом он должен обосновать применимость этого метода к решению предложенной краевой задачи, а также целесообразность его применения по сравнению с методом Фурье.

Реализуя метод разделения переменных необходимо получить задачу Штурма-Лиувилля [1] для оператора Лапласа (или более общего оператора, включающего оператор Лапласа) в соответствующей системе координат. Задача Штурма-Лиувилля включает как спектральное уравнение для оператора Лапласа, так и граничные условия.

В результате решения задачи Штурма-Лиувилля необходимо получить счетный набор собственных функций оператора Лапласа, удовлетворяющих граничным условиям, а также набор собственных чисел, отвечающих найденным собственным функциям.

В ряде вариантов курсовой работы задача нахождения собственных чисел связана с численным решением трансцендентного уравнения, получающегося в процессе решения задачи Штурма-Лиувилля. Для вычисления решений этого уравнения (т. е. характеристических чисел, через которые выражаются собственные числа) следует воспользоваться любым подходящим методом, например, изложенным в подразделе 4.2. Вычисление характеристических чисел необходимо осуществлять с обоснованной точностью, гарантирующей обеспечение требуемой точности расчета итогового результата – решения исходной краевой задачи. При разработке программного модуля, обеспечивающего расчет характеристических чисел целесообразно обеспечить автоматический контроль погрешности их вычисления.

Во всех предложенных вариантах курсовой работы наборы собственных функций, полученные в результате решения задачи Штурма-Лиувилля, представляют собой ортогональные функциональные базисы. Поиск аналитического решения исходной задачи следует осуществлять в виде разложения по этому базису, т. е. в виде бесконечного ряда с неизвестными функциональными коэффициентами. Для отыскания этих коэффициентов привлекаются разложения правой части дифференциального уравнения и (или, в зависимости от варианта задачи) начального условия.

В общем случае коэффициенты разложений имеют интегральную форму. В ряде вариантов аналитическое вычисление интегралов весьма проблематично. В этом случае необходимо использовать метод численного интегрирования, например, метод Симпсона [4, 5, 6]. Необходимо также обеспечить контроль погрешности численного интегрирования.

Во всех вариантах курсовой работы итоговый формульный результат аналитического решения краевой задачи будет представлять собой бесконечный функциональный ряд Фурье. Прежде всего, необходимо убедиться в сходимости полученного ряда. Для практического применения этого результата, т. е. для осуществления расчетов по полученной формуле, необходимо провести обоснованное усечение бесконечного ряда. Последнее можно сделать, получив оценку сверху модуля остатка ряда. В деле оценивания ряда важно, чтобы полученная функция-оценка зависела от числа слагаемых в частичной сумме ряда, причем эта функция должна стремиться к нулю при стремлении этого числа к бесконечности. Тогда требуя, чтобы значения функции-оценки не превышали величины допустимой погрешности, можно получить соответствующее число слагаемых в частичной сумме ряда.

Очевидно, что для одного и того же функционального ряда могут быть получены различные мажорантные оценки остатка. Они могут различаться

по качеству: одни могут быть более грубыми, другие – менее. Использование грубой оценки может привести к существенному завышению числа слагаемых частичной суммы ряда, гарантирующего достижения требуемой точности. Последним этапом работы является экспериментальное исследование качества полученной оценки остатка ряда. Выбор методологии экспериментального исследования необходимо согласовать с преподавателем.

Следует отметить, что при выполнении курсовой работы может возникнуть необходимость вычислять значения специальных функций (например, функций Бесселя, функций Лежандра), а также значения собственных чисел оператора Лапласа в криволинейных координатах для соответствующих краевых условий. В этих случаях рекомендуется обсудить и согласовать свои действия с преподавателем.

3 Основные требования к выполнению курсовой работы

3.1 Требования к компьютерным программам

Для составления программ следует использовать один из языков высокого уровня.

Степень универсальности программных процедур должна исключать необходимость каких-либо изменений в программе при варьировании исходных данных в заранее оговоренных пределах.

Тексты программ должны быть рационально структурированы.

Рекомендуется обеспечить в программе контроль соблюдения тех ограничений, в рамках которых гарантируется получение верного результата. Те или иные нарушения ограничений целесообразно сопровождать сообщениями, а если необходимо, то и прерыванием работы программы.

Организация выходной информации должна обеспечивать удобство ее восприятия. В частности, любая числовая или графическая информация должна сопровождаться текстовыми пояснениями.

3.2 Требования к оформлению отчета по курсовой работе

Отчет по курсовой работе должен иметь структуру, отраженную в приложении А. Отчет должен быть заключен в обложку со стандартным титульным листом (см. приложение Б). В начале отчета должен быть приведен полный текст задания к курсовой работе, вариант задачи математической физики. Здесь же следует привести конкретные значения параметров и выражения функций, которые были использованы при проведении вычислительных экспериментов.

Далее необходимо привести **Реферат** (см. пример оформления реферата в приложении В), **Содержание** (см. пример оформления содержания в приложении Г), **Введение** (см. пример оформления введения в приложении Д). Затем следует изложить основную часть работы, которая должна состоять из нескольких разделов, отражающих суть проделанной работы. Например, наименования разделов могут быть следующими:

- «1 Математическая постановка краевой задачи»;
- «2 Получение решения задачи в виде Ряда Фурье»;
- «3 Исследование сходимости ряда»;
- «4 Оценка остатка ряда»;
- «5 Вычисление собственных чисел оператора Лапласа»;
- «6 Результаты расчетов и вычислительных экспериментов».

В конце отчета следует привести **Заключение**, **Список использованных источников**, **Приложение**. В **Заключении** кратко

формулируют основные результаты работы и выводы (см. приложение Е). В **Список использованных источников** включаются учебники, учебные пособия, методические указания, статьи научных журналов и сборников, электронные ресурсы, монографии и другие источники, которые были использованы при выполнении работы. Распечатка программы приводится в **Приложении**.

Разделы основной части должны быть пронумерованы. Другие части отчета (Задание, Вариант задачи, Реферат, Содержание, Введение, Заключение, Список использованных источников, Приложение) не нумеруются.

4 Теоретические сведения

4.1 Метод разделения переменных (метод Фурье)

Этим методом пользуются при построении решений так называемых *смешанных задач* для широкого класса уравнений с частными производными.

Обозначим через D область пространства переменных $x_1, \dots, x_n, t$, ограниченную плоскостью $t=0$ и цилиндрической поверхностью S с образующими, параллельными оси t , и лежащую в области задания уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) u_{x_i} + C(x) u - \alpha(t) u_{tt} - \beta(t) u_t - \gamma(t) u = 0. \quad (1)$$

Предположим, что квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$ положительно определена, коэффициент $\alpha(t)$ либо больше нуля, либо тождественно равен нулю, причем в последнем случае $\beta(t) > 0$. В таком случае уравнение (1) либо гиперболическое, либо параболическое.

Общая смешанная задача для уравнения (1) состоит в *определении регулярного в области D решения $u(x, t)$ этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию*

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + b(x) u = 0, \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

в гиперболическом случае,

$$u(x, 0) = \varphi^*(x) \quad (4)$$

в параболическом случае.

Для обеспечения непрерывности искомого решения вплоть до границы области D нужна определенная согласованность между данными в условиях (2), (3) и (4).

Сущность метода разделения переменных заключается в следующем.

Нетривиальное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (2), ищется в виде произведения двух функций $T(t)$ и

$$\begin{aligned} X(x) &= X(x_1, \dots, x_n): \\ u(x, t) &= T(t)X(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) для $u(x, t)$ в уравнение (1) и в краевое условие (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \left[\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) X_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) X_{x_i} + C(x) X \right] &= \frac{1}{T(t)} [\alpha(t) T'' + \beta(t) T' + \gamma(t) T] = \\ &= -\lambda = \text{const}, \quad (x, t) \in D, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i(x) X_{x_i} + b(x) X \right] T(t) = 0, \quad x \in S, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Ввиду того, что $X(x)$ и $T(t)$ тождественно в нуль не обращаются, из равенств (6) и (7) имеем

$$\alpha(t) T'' + \beta(t) T' + [\gamma(t) + \lambda] T = 0, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) X_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) X_{x_i} + [C(x) + \lambda] X = 0, \quad x \in d, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) X_{x_i} + b(x) X = 0, \quad x \in s, \quad (10)$$

где d и s — проекции области D и поверхности S на плоскость $t = 0$ соответственно.

Значение λ , для которого краевая задача (9), (10) имеет нетривиальное решение $X(x)$, называется *собственным значением (собственным числом)*, а сама функция $X(x)$, соответствующей *собственной функцией*.

Множество всех собственных значений задачи (9), (10) называется *спектром*, а задача об отыскании спектра и соответствующей ему системы собственных функций — *спектральной задачей*.

В целом ряде случаев спектр задачи (9), (10) является счетным:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty,$$

а система линейно независимых собственных функций

$$X_1(x), X_2(x), \dots \quad (11)$$

- полной. Ниже речь будет идти именно о таких случаях.

Обозначим через $T_k(t)$ соответствующее $\lambda = \lambda_k$ общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (8) при $\alpha(t) > 0$:

$$T_k(t) = \alpha_k T_{k1}(t) + \beta_k T_{k2}(t), \quad (12)$$

где α_k, β_k — произвольные действительные постоянные, а $T_{k1}(t)$ и $T_{k2}(t)$ - решения уравнения (8), удовлетворяющие условиям

$$T_{k1}(0) = 1, \quad T'_{k1}(0) = 0, \quad T_{k2}(0) = 0, \quad T'_{k2}(0) = 1. \quad (13)$$

При $\alpha(t) = 0, \beta(t) > 0$ общее решение $T_k(t)$ уравнения (8) берется в ряде

$$T_k(t) = \alpha_k^* T_{k1}(t), \quad (12')$$

где

$$T_{k1}(0) = 1. \quad (13')$$

Очевидно, что функция $u(x, t)$ вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \quad (14)$$

в случае равномерной сходимости ряда в правой части этого равенства и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз, является решением уравнения (1), удовлетворяющим краевому условию (2). Потребовав, чтобы представленная формулой (14) функция $u(x, t)$ удовлетворяла и начальным условиям (3) или (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x) = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X_k(x) = \psi(x) \quad (15)$$

или, соответственно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* X_k(x) = \varphi^*(x). \quad (15')$$

Если система собственных функций (11) оператора Штурма-Лиувилля является полной и ортонормированной, то для определения коэффициентов $\alpha_k, \beta_k, \alpha_k^*$ из (15) и (15') имеем

$$\alpha_k = \int_d \varphi(x) X_k(x) d\tau_x, \quad \beta_k = \int_d \psi(x) X_k(x) d\tau_x \quad (16)$$

и

$$\alpha_k^* = \int_d \varphi^*(x) X_k(x) d\tau_x. \quad (16')$$

Подставляя найденные значения параметров α_k , β_k , α_k^* из соотношений (16) и (16') в соотношения (12) и (12') соответственно, находим $T_k(t)$. Следовательно, формула (14) дает решение сформулированной выше смешанной задачи.

При $n=1$ уравнение (9) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(x)X'' + B(x)X' + [C(x) + \lambda]X = 0,$$

$$A(x) = A_1(x_1), \quad x_1 = x, \quad (17)$$

область D совпадает с полуполосой $0 < x < l$, $t > 0$ и краевое условие (10) записывается в виде

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \quad (18)$$

где a_k , b_k , $k=1,2$, — постоянные, ибо в этом случае краевое условие (2) имеет вид

$$a_1 u_x(0, t) + b_1 u(0, t) = 0, \quad a_2 u_x(l, t) + b_2 u(l, t) = 0. \quad (19)$$

Спектральная задача (17), (18) носит название *задачи Штурма — Лиувилля* (или, короче, *задачи Ш-Л*). Исследование задачи Ш-Л (17), (18) в общем случае затруднительно. Оно сильно осложняется, когда в отдельных точках интервала изменения переменного x коэффициент $A(x)$ равен нулю. В этом случае становится необходимым ввести в рассмотрение специальные функции.

Когда $n=1$ и коэффициент уравнения (1) постоянные, решения задачи Ш-Л (17), (18) строятся явно. Так, например, в случае уравнения колебания струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0, \quad a = \text{const},$$

уравнения (8) и (17) имеют вид

$$T''(t) + a^2 \lambda T = 0, \quad (8')$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (17')$$

Ради простоты рассуждения будем считать, что в краевых условиях (18) $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, $l = \pi$, т. е.

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \quad (18')$$

Спектр задачи (17'), (18') совпадает с последовательностью натуральных чисел, а система линейно независимых собственных функций $X_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, является полной в интервале $(0, \pi)$. Решение же $T_k(t)$ уравнения (8'), соответствующее $\lambda = k^2$, дается формулой

$$T_k(t) = \alpha_k \cos akt + \beta_k \sin akt.$$

В этих же предположениях в случае уравнения теплопроводности $a^2 u_{xx} - u_t = 0$ собственными функциями являются опять $X_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \dots$, а

$$T_k(t) = \alpha_k e^{-k^2 a^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

поскольку в рассматриваемом случае уравнение (8) имеет вид $T' + a^2 k^2 T = 0$.

Метод разделения переменных позволяет строить решения смешанных задач и в тех случаях, когда уравнение и краевые условия являются неоднородными.

Ограничимся рассмотрением смешанной задачи

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_t = f(x, t), \quad (20)$$

$$a_1 u_x(0, t) + b_1 u(0, t) = \mu(t), \quad (21)$$

$$a_2 u_x(l, t) + b_2 u(l, t) = \nu(t),$$

$$a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \quad k = 1, 2,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (22)$$

Прежде всего заметим, что при некоторых дополнительных предположениях относительно a_1, b_1, a_2, b_2 постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ можно подобрать так, чтобы в результате замены искомой функции

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

Где $w(x, t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3) \mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3) \nu(t)$, задача (20), (21), (22) будет редуцирована к смешанной задаче для уравнения

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_t = F(x, t) \quad (20')$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1 v_x(0, t) + b_1 v(0, t) = 0, \quad a_2 v_x(l, t) + b_2 v(l, t) = 0 \quad (21')$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0) = \psi_1(x), \quad (22')$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - w_{xx} + \frac{1}{a^2} w_{tt},$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - w(x, 0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - w_t(x, 0).$$

Предположим, что существует полная ортонормированная система линейно независимых собственных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, задачи III-Л

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (23)$$

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0. \quad (24)$$

Представляя функции $F(x, t)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ в виде суммы рядов

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \quad (25)$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \quad \psi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x), \quad (26)$$

будем искать решение задачи (20'), (21'), (22') в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \quad (27)$$

Подставляя выражение $F(x, t)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $v(x, t)$ из (25), (26) и (27) в уравнение (20') и условия (22'), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k(t) X_k''(x) - \frac{1}{a^2} T_k''(t) X_k(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x).$$

На основании (23) перепишем равенство (28) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t)] X_k(x) = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x). \quad (28')$$

В силу линейной независимости систем $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, из (28') и (29) получаем следующую задачу для определения функций $T_k(t)$:

$$\begin{aligned} T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) &= -a^2 c_k(t), \\ T_k(0) &= d_k, \quad T_k'(0) = e_k, \end{aligned}$$

решение которой строится в квадратурах.

Подставляя найденные значения $T_k(t)$ в правую часть (27), при соблюдении условий, налагаемых на функций F , φ_1 и ψ_1 , обеспечивающих равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$ и рядов, полученных из него почленным дифференцированием достаточное число раз, получаем решение задачи (20'), (21'), (22').

Когда правая часть уравнения (20) является функцией лишь переменной x , т. е.

$$f(x, t) \equiv f(x),$$

и в краевых условиях (21) правые части $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ постоянные, причем

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 b_2 l \neq 0, \quad (30)$$

в результате замены искомой функции

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x),$$

где

$$\begin{aligned} w''(x) &= f(x), \\ a_1 w'(0) + b_1 w(0) &= \mu_0, \quad a_2 w'(l) + b_2 w(l) = \nu_0, \end{aligned} \quad (31)$$

задача (20), (21), (22) редуцируется к смешанной задаче для однородного уравнения

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} = 0$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1 v_x(0, t) + b_1 v(0, t) = 0, \quad a_2 v_x(l, t) + b_2 v(l, t) = 0$$

и с начальными условиями

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Задача же (31) при соблюдении условия (30) всегда имеет решение.

Методом разделения переменных пользуются также и при построении решений определенных классов уравнений эллиптического типа.

4.2 Методы решения нелинейных уравнений

4.2.1 Метод Ньютона (метод касательных)

Рассмотрим нелинейное относительно x уравнение

$$f(x) = 0. \quad (32)$$

Пусть x^* – корень уравнения (32), т.е. $f(x^*) \equiv 0$, а x_n – некоторое приближение к корню, т.е.

$$x^* = x_n + \delta_n. \quad (33)$$

Используя разложение функции $f(x^*)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_n , получим $f(x^*) = f(x_n + \varepsilon) = f(x_n) + f'(x_n)\varepsilon + o(\varepsilon^2)$. Если пренебречь величиной $o(\varepsilon^2)$ и учесть, что $f(x^*) \equiv 0$ получим приближенное равенство

$$x^* \approx x_n - f(x_n) / f'(x_n). \quad (34)$$

Обозначим правую часть равенства (34) через x_{n+1} , т.е.

$$x_{n+1} \approx x_n - f(x_n) / f'(x_n). \quad (35)$$

Задавая начальное приближение x_0 , можно построить с помощью формулы (35) последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$

Укажем условия, достаточные для сходимости этой последовательности к корню x^* . Предположим, что нам удалось найти такой интервал (a, b) , который содержит корень x^* . Если вторая производная $f''(x)$ не меняет своего знака на (a, b) и $f'(x) \neq 0$, а начальное приближение $x_0 (x_0 \in (a, b))$ выбрано так, что $f(x_0)f''(x_0) > 0$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ сходится к корню x^* .

4.2.2 Метод секущих (метод хорд)

Формулу метода секущих легко получить из формулы Ньютона (35), заменяя производную $f'(x_n)$ разностным отношением $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ т.е.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{f(x_n) - f(x_0)} \text{ или иначе} \quad x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Задавая два приближения x_0 и x_1 , можно построить последовательность чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$

Укажем условия, достаточные для сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$. Предположим, что $x^* \in (a, b)$. Если вторая производная $f''(x)$ не меняет своего знака на (a, b) , а также выполняются условия

$$f(a)f(b) < 0 \quad (37)$$

$$f(a)f''(a) > 0, \quad (38)$$

то последовательность $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, полученная с помощью формулы (36) при $x_0 = b$ и $x_1 = a$, также будет сходиться к x^* .

4.2.3 Комбинированный метод

Этот метод представляет собой комбинацию методов Ньютона и секущих [5, 6]. Пусть $x^* \in (a, b)$, $f''(x)$ сохраняет знак на (a, b) , а функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (37) и (38). Обозначим $x_0 = a$ и $\bar{x}_0 = b$. Тогда последовательности $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ и $\{\bar{x}_n\}_{n=1,2,\dots}$, построенные по формулам

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (39)$$

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1}f(\bar{x}_n) - \bar{x}_nf(x_{n+1})}{f(\bar{x}_n) - f(x_{n+1})}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (40)$$

будут сходиться к корню x^* слева и справа соответственно. Если вместо условия (38) выполнятся условие $f(b)f''(b) > 0$, то начальные приближения выбирают иначе: $x_0 = b$, $\bar{x}_0 = a$.

4.2.4 Метод простой итерации

Предположим, что уравнение (32) приведено к виду

$$x = \varphi(x). \quad (41)$$

Тогда итерационная последовательность строится по правилу

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (42)$$

Обозначим

$$\varepsilon_n = x_n - x^*, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (43)$$

где x^* – корень уравнения (41). ($x^* \equiv \varphi(x^*)$).

Согласно формуле Тейлора

$$\varphi(x_n) = \varphi(x^* + \varepsilon_n) = \varphi(x^*) + \varphi'(\xi_n)\varepsilon_n, \quad (44)$$

где $x^* \leq \xi_n \leq x_n$.

Учитывая равенства (42), (43), (44), получим

$$\varepsilon_{n+1} = \varphi'(\xi_n)\varepsilon_n. \quad (45)$$

Предположим, что $x^* \in (a, b)$ и $|\phi'(x)| \leq \alpha < 1 \quad \forall x \in (a, b)$, где $\alpha > 0$. Тогда при условии $x_n \in (a, b) \forall n$ будем иметь

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \alpha^{n+1} |x_0 - x^*|. \quad (46)$$

Из неравенства (46) следует сходимость последовательности к корню x^* .

4.2.5 Метод половинного деления

Предположим, что отрезок $[a, b]$ содержит только один корень x^* уравнения (32), а функция $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, причем $f(a)f(b) < 0$. Пусть $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c)f(a) < 0$, то можно утверждать, что $x^* \in [a, c]$. В противном случае $x^* \in [c, b]$. Новый отрезок, содержащий корень, вдвое меньше прежнего. Процедуру деления отрезка пополам продолжают до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность вычисления корня x^* .

4.3 Вычисление интегралов с помощью приближенных квадратурных формул

4.3.1 Формула прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Проведем равномерное разбиение отрезка $[a, b]$ на N частей. Обозначим $h = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + ih$, $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, N}$.

Квадратурная формула прямоугольников имеет следующий вид [6]

$$\int_a^b f(x)dx = h(f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1}) + R_N,$$

где

$$R_N = \frac{b-a}{2} hf'(\xi), \xi \in [a, b].$$

4.3.2 Формула Симпсона

Пусть N – четно, т.е. $N = 2n$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид [6]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + f_{2n} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2})] + R_{2n},$$

где

$$R_{2n} = -\frac{b-a}{180} h^4 f''(y), y \in [a, b].$$

4.4 Суммирование рядов

Пусть дан ряд

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (47)$$

сумму которого нужно вычислить с относительной точностью ε .

Прежде чем заняться вычислением суммы ряда (47), нужно, во-первых, установить факт сходимости ряда, во-вторых, получить оценку остатка ряда

$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$, позволяющую контролировать точность вычисления искомой суммы.

Предположим, что такая оценка найдена

$$|R_N| \leq B(N), \quad (48)$$

где $B(N) < 0$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} B(N) = 0$. Если взять в качестве приближенного значения

искомой суммы частную сумму ряда $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$, то относительная погрешность результата будет равна $\varepsilon_S = R_N / S$. Тогда с учетом оценки (48) можно записать

$$|\varepsilon_S| \leq B(N) / |S| \approx B(N) / |S_N|.$$

На практике для вычисления суммы S с заданной точностью ε берут столько первых слагаемых ряда (4.1), чтобы обеспечивалось выполнение неравенства

$$\frac{B(N)}{|S_N|} \leq \varepsilon. \quad (49)$$

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{3\pi}{4}. \quad (50)$$

При $n \geq 4$ данный ряд будет знакочередующимся, а при $n \geq 6$ справедливо неравенство $\sin \frac{3\pi}{n} > \sin \frac{3\pi}{n+1}$, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{3\pi}{n} = 0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница ряд (50) сходится, причем справедлива оценка

$$R_N \leq \sin \frac{3\pi}{N+1}, \quad N \geq 6. \quad (51)$$

Тогда для обеспечения требуемой точности необходимо в процессе вычисления суммы ряда проверить условие

$$(\sin \frac{3\pi}{N+1}) / |S_N| \leq \varepsilon. \quad (52)$$

Выполнение неравенства (52) является условием прекращения процесса суммирования элементов ряда. В качестве искомого результата берется частичная сумма S_N .

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}. \quad (53)$$

Нетрудно показать, что последовательность $\{ne^{-n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей при $n \rightarrow \infty$. Тогда, применяя интегральный признак Коши, убеждаемся в сходимости ряда. Для остатка ряда справедлива следующая оценка:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-n^2} < \int_N^{\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-N^2}.$$

Следовательно, условие прекращения суммирования ряда (53) будет иметь вид

$$e^{-N^2} / 2S_N < \varepsilon.$$

4.5 Особенности представления оператора Лапласа в полярной системе координат при условии осевой симметрии

При построении математических моделей процессов и явлений различной природы нередко используются криволинейные системы координат. Простейшими примерами таких систем являются полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. При построении разностных схем для дифференциальных краевых задач, поставленных с использованием криволинейных систем координат, могут появиться трудности, которые не возникают при использовании декартовой системы координат.

Предположим, что для описания физического явления используется полярная или цилиндрическая система координат. Допустим также, что в математической модели явления использовано дифференциальное уравнение, содержащее оператор Лапласа. Рассмотрим ту часть оператора Лапласа, которая связана с радиальной координатой r :

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}. \quad (54)$$

Видно, что в выражении правой части равенства (54) имеется дробь с переменной r в знаменателе. Следовательно, если радиальная координата r примет значение $r = 0$, то правая часть выражения (54) потеряет смысл. Ясно, что причины этого кроются не в физике явления, а в несовершенстве формы (54).

Найдем другую форму представления оператора Лапласа при $r = 0$, учитывая свойство осевой симметрии физического поля $u(r, \vartheta)$. Для этого наряду с полярной системой координат рассмотрим декартову систему, центр которой совмещен с центром полярной.

Если поле $u(r, \vartheta)$, где ϑ - полярный угол, осесимметричное, то можно записать

$$u(r, \vartheta) = u(r) = \tilde{u}(x, y).$$

Для такого поля справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=0} = \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right|_{x=0, y=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=0},$$

так как результаты дифференцирования не зависят от полярного угла ϑ .

Следовательно, для оператора Лапласа в точке $r = 0$ будем иметь:

$$\Delta u|_{r=0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{r=0} = 2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=0}. \quad (55)$$

Форма (55) лишена прежнего недостатка.

Итак, при использовании полярной или цилиндрической систем координат для построения математической модели осесимметричного физического процесса, целесообразно воспользоваться следующим выражением для оператора Δ_r :

$$\Delta_r u = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}, & r \neq 0; \\ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, & r = 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, в точке с координатой $r = 0$ форма дифференциального уравнения будет отличаться от прежней. В случае использования аналитического метода решения краевой задачи запись уравнения при $r = 0$ может и не потребоваться. Однако при построении аппроксимирующей разностной схемы игнорирование этого уравнения может создать существенные неудобства, например, не позволит замкнуть систему сеточных уравнений.

Отметим, что если для описания физического процесса выбрана сферическая система координат, то в случае центральной симметрии справедлива формула

$$\Delta_r u = \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}, & r \neq 0; \\ 3 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, & r = 0. \end{cases}$$

Остановимся еще на одном вопросе. При построении разностных схем для краевых задач математической физики в круге (цилиндре, шаре) обнаруживается нехватка одного из граничных условий. Нетрудно заметить, что предположение о гладкости решения задачи и свойство осевой (центральной) симметрии приводят к условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

В противном случае не будет иметь место по крайней мере одно из отмеченных свойств.

5 Варианты задач к курсовой работе

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики : учеб. для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. - М. : Физико-математическая литература, 2000. - 399 с.
2. *Меньших О. Ф.* Уравнения математической физики : учеб. пособие / О. Ф. Меньших, Ю. Л. Файницкий ; Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : СГАУ, 2006. - 118 с.
3. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики: учеб. пособие для университетов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. - М. : Наука, 1972. – 736 с.
4. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики : решение задач в системе Maple / Д. П. Голоскоков. - СПб. ; М. ; Нижний Новгород : Питер : Питер принт, 2004. - 538 с.
5. *Бахвалов Н. С.* Численные методы : учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 5-е изд. - М. : Бином. Лаб. знаний , 2007. - 636 с.
6. *Коварцев А. Н.* Вычислительная математика : учеб. пособие : [для вузов по направлению подгот. ВПО 010400.62 "Информ. технологии"] / А. Н. Коварцев. - Самара : Офорт, 2011. - 230 с.
7. *Самарский А. А.* Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1987. - 288 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Структура отчета по курсовой работе

- Титульный лист.
- Задание к курсовой работе, текст варианта задачи, числовые значения параметров и выражения для функций, заданных преподавателем.
- Реферат.
- Содержание.

Введение (приводится информация о методах решения рассматриваемой задачи).

Основная часть. Эта часть делится на разделы, соответствующие основным этапам курсовой работы. Разделы нумеруются цифрами: 1, 2, ... Разделы могут состоять из подразделов, которые нумеруются так: 1.1, 1.2, ...

Заключение (формулируются основные результаты и выводы).

Список использованных источников (источники нумеруются в порядке появления в тексте).

Приложение (распечатка исходной программы).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Пример оформления титульного листа отчета по курсовой работе

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

Факультет информатики

Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе

Дисциплина: «Уравнения математической физики»

Тема: «**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**»

Вариант № ...

Выполнил студент ...

Группа

Преподаватель

Дегтярев А.А.

2017

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Пример реферата

РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 26 с., 4 рисунка, 2 таблицы, 4 источника, 1 приложение.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА, РЯД ФУРЬЕ, ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА.

Целью курсовой работы является получение решения краевой задачи теплопроводности для тонкой круговой пластины в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа и создание компьютерной программы для расчета функции-решения с заданной точностью.

Для получения аналитического решения краевой задачи использован метод разделения переменных (метод Фурье). Решение задачи получено в виде бесконечного ряда Фурье-Бесселя. Получена оценка остатка ряда.

Разработана компьютерная программа, обеспечивающая расчет и графическую визуализацию теплового поля пластины на временном промежутке $0 < t \leq T$. Для контроля погрешности усечения бесконечного ряда использована оценка остатка ряда.

Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности, а также результаты экспериментального исследования практической пригодности полученной оценки остатка ряда.

Программа написана на языке C# в среде разработки Visual Studio 2008, операционная система Windows XP Professional (Service Pack 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
Пример содержания отчета по курсовой работе

Содержание

Введение.....	6
1 Математическая постановка задачи	7
2 Аналитическое решение краевой задачи диффузии методом разделения переменных.....	9
3 Расчет собственных чисел оператора Лапласа.....	12
3 Расчет интегральных коэффициентов ряда Фурье.....	14
4 Исследование сходимости ряда Фурье. Оценка остатка ряда	15
5 Исследование практической пригодности оценки остатка ряда с помощью вычислительных экспериментов.....	18
Заключение	20
Список использованных источников	21
Приложение А Текст программы.....	22

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Пример введения для отчета по курсовой работе

Введение

Метод разделения переменных относится к классу аналитических методов решения краевых задач математической физики. Характеризуя этот метод необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода разделения переменных следует отнести возможность получения *точного* решения краевой задачи в виде ряда Фурье. Такая форма решения задачи часто и весьма успешно используется для теоретического исследования свойств этого решения. В случае достаточно быстрой сходимости ряда Фурье она может с успехом использоваться для численного моделирования физического процесса (явления).

К числу недостатков метода следует отнести его невысокую универсальность. Этот метод весьма проблематично использовать для решения нелинейных уравнений математической физики, уравнений с переменными операторными коэффициентами, а также для решения краевых задач в областях со сложными границами.

Суть метода разделения переменных состоит в факторизации по каждой независимой переменной функции, определяющей решение уравнения математической физики. Далее осуществляется переход к так называемой задаче Штурма-Лиувилля, решение которой приводит к получению собственных функций и соответствующих им собственных чисел оператора Лапласа. Затем решение исходной задачи ищется в виде ряда Фурье по этим собственным функциям.

В настоящей работе метод разделения переменных применен для получения аналитической формы решения третьей краевой задачи диффузии. На основе этого результата разработан алгоритм и компьютерная программа численного моделирования процесса диффузии в тонкой трубке.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Пример заключения для отчета по курсовой работе

Заключение

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для волнового уравнения, получено аналитическое решение задачи в виде бесконечного ряда Фурье.

Проведено теоретическое исследование полученного ряда, в результате которого установлено, что ряд сходится абсолютно, а также равномерно по пространственным переменным. Доказать равномерную сходимость по временной переменной не удалось.

Получена оценка сверху остатка ряда, которая была использована в компьютерной программе численного моделирования волнового процесса и позволила обеспечить контроль погрешности усечения бесконечного ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что использование в программе полученной оценки остатка ряда может приводить к существенной избыточности числа суммируемых элементов ряда. Например, если значение переменной времени задавать в промежутке от 0 до 0,3 секунд, то избыточность суммируемых элементов ряда варьирует от 8 до 1,5. При дальнейшем увеличении значений переменной времени избыточность оказывается несущественной и почти не сказывается на времени работы программы.

Учебное издание

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Методические указания

Составитель *Дегтярев Александр Александрович*

Самарский университет
443086 Самара, Московское шоссе, 34
