

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»

Факультет информатики

Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе

Дисциплина: «Численные методы математической физики»

**Тема: «РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»**

Вариант № 3*

Выполнили студенты: Зайнетдинова Л.Г., Полянская М.И., Юлова О.С.

Группа: 6407-010302D

Преподаватель: Дегтярев А.А.

2018

ЗАДАНИЕ

Плоско-параллельный термически тонкий слабопоглощающий оптический элемент, имеющий форму диска толщиной l и радиусом R ($l \ll R$), облучается лазерным пучком света с распределением интенсивности излучения $I(r)$. В результате поглощения части энергии излучения оптический элемент нагревается. Пластина является однородной и выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами поглощения β , теплопроводности k , объемной теплоемкости c .

Пучок света обладает круговой симметрией и падает нормально на поверхность пластины, причем оси пучка и оптического элемента совпадают.

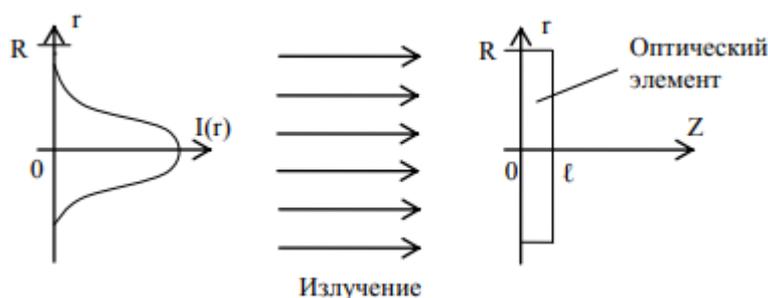


Рисунок 1 – Схема воздействия лазерного пучка на оптический элемент.

Боковая поверхность $r = R$ оптического элемента теплоизолирована, а между гранями ($z = 0$, $z = l$) и окружающей средой имеет место теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплоотвода α .

В момент включения лазера $t = 0$ температура оптического элемента предполагается одинаковой во всех точках и равной температуре окружающей среды u_0 .

Разработать программу численного моделирования динамического теплового поля оптического элемента на временном промежутке $0 < t \leq T$, используя для решения задачи теплопроводности:

- простейшую явную разностную схему (Юлова Ольга);
- простейшую неявную разностную схему (Зайнетдинова Лилия);

- простейшую неявную схему повышенного порядка аппроксимации (Полянская Маргарита).

При проведении расчетов использовать значения параметров $k, c, \alpha, l, T, u_0, R, \beta$ и выражение функции $I(r)$, указанные преподавателем.

Указание: энергию лазерного излучения, поглощаемую в процессе его прохождения через материал оптического элемента, считать распределенным температурным источником.

Значения параметров, указанные преподавателем:

$$k = 0.065 \frac{\text{Вт}}{\text{см} * \text{К}},$$

$$c = 1.84 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3 * \text{К}},$$

$$\alpha = 0.01 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 * \text{К}},$$

$$l = 0.5 \text{ см},$$

$$R = 5 \text{ см},$$

$$T = 100 \text{ с}, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\beta = 0.004 \frac{1}{\text{см}},$$

$$P = 40 \text{ Вт},$$

$$a = \frac{R}{5} \text{ см},$$

$$I(r) = \begin{cases} \frac{P}{\pi a^2}, & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 42 стр., 9 рисунков, 5 источников, 1 приложение.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, НЕЯВНАЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, АППРОКСИМАЦИЯ, СХОДИМОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Целью курсовой работы является построение и исследование разностных схем для решения краевой задачи теплопроводности для нагрева тонкого оптического элемента лазерным излучением.

Для решения задачи использованы явная, неявная и неявная повышенного порядка аппроксимации конечно-разностные схемы. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи.

Разработана компьютерная программа, обеспечивающая расчет и графическую визуализацию распространения температуры в оптическом элементе.

Приведены графические результаты численного решения задачи теплопроводности.

Программа написана на языке Python, операционная система Windows10.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Математическая постановка задачи	7
2 Простейшая явная схема.....	10
3 Простейшая неявная схема.....	12
4 Простейшая неявная схема повышенного порядка аппроксимации.....	15
5 Исследование аппроксимации	18
5.1 Исследование аппроксимации простейшей явной схемы.....	18
5.2 Исследование аппроксимации неявной разностной схемы	19
5.3 Исследование аппроксимации неявной разностной схемы повышенного порядка аппроксимации.....	20
6 Исследование устойчивости.....	25
6.1 Исследование устойчивости неявной разностной схемы	25
6.2 Исследование устойчивости неявной разностной схемы повышенного порядка аппроксимации.....	28
7 Результаты вычислительных экспериментов	32
Заключение.....	36
Список использованных источников.....	38
Приложение А.....	39

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей, необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи теплопроводности. Проведены теоретические исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи.

1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем уравнение теплопроводности в виде [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{c} \Delta u + \frac{1}{c} \beta I(r), \quad (1)$$

где $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, H – коэффициент теплопроводности, c – объёмная теплоёмкость.

Запишем начальное условие:

$$u|_{z=0} = u_0.$$

По условию задачи между окружающей средой и гранями элемента имеет место теплообмен, описанный законом Ньютона [1]:

$$q = \alpha(u - u_0),$$

где q – плотность теплового потока, α – коэффициент теплоотдачи.

Из этого следуют краевые условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\alpha}{H} [u|_{z=0} - u_0], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=l} = -\frac{\alpha}{H} [u|_{z=l} - u_0], \\ H \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Задача примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{H}{c} \Delta u + \frac{1}{c} \beta I(r), \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\alpha}{H} [u|_{z=0} - u_0], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=l} = -\frac{\alpha}{H} [u|_{z=l} - u_0], \\ H \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Примем, что $v(r, t) = \frac{1}{l} \int_0^l u(r, z, t) dz$.

Так как толщина оптического элемента гораздо меньше его размеров, тогда возможно провести усреднение:

$$1) \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{l} \int_0^l u dz \right] = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2)$$

$$2) \frac{1}{l} \int_0^l \frac{H}{c} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) dz = \frac{H}{cr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{l} \int_0^l u dz \right] \right) = \frac{H}{rc} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$3) \frac{H}{c} \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = \frac{-2\alpha}{cl} [v - u_0]. \quad (4)$$

При усреднении начальное и граничное условие примет вид:

$$v|_{t=0} = u_0.$$

С учетом уравнений (2), (3), (4) получим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{H}{c} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) - \frac{2\alpha}{cl} [v - u_0] + \frac{1}{c} \beta I(r), \\ v|_{t=0} = u_0, \\ H \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $w = v - u_0$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{H}{cr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{lc} w + \frac{\beta}{c} I(r).$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Граничное условие для края диска:

$$H \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0.$$

Получим итоговую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{H}{cr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{lc} w + \frac{\beta}{c} I(r), \\ H \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \\ w \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При $r = 0$ $\Delta w \Big|_{r=0} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \Big|_{r=0}$. Таким образом, задача примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{H}{cr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2\alpha}{lc} w + \frac{\beta}{c} I(r), \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=0} = \frac{2H}{cr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \Big|_{r=0} - \frac{2\alpha}{lc} w \Big|_{r=0} + \frac{\beta}{c} I(0), \\ H \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \\ w \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (5)$$

2 ПРОСТЕЙШАЯ ЯВНАЯ СХЕМА

Для построения явной разностной схемы для задачи (5) заменим все соотношения, составляющие краевую задачу, в том числе и граничные условия их сеточными аналогами. Будем использовать равномерную сетку как множество узлов (r_i, t_k) , где

$$\begin{aligned} r_i &= ih_r, i = \overline{0, I}, h_r = \frac{R}{I}, \\ t_k &= kh_t, k = \overline{0, K}, h_t = \frac{T}{K}. \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользуемся для замены производных нижеприведенными разностными отношениями:

$$\frac{dw}{dt} \approx \frac{w(r_i, t_{k+1}) - w(r_i, t_k)}{h_t},$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} \approx \frac{w(r_{i+1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i-1}, t_k))}{h_r^2},$$

$$\frac{dw}{dr} \approx \frac{w(r_i, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{h_r}.$$

На рисунке 1 приведён шаблон явной разностной схемы.

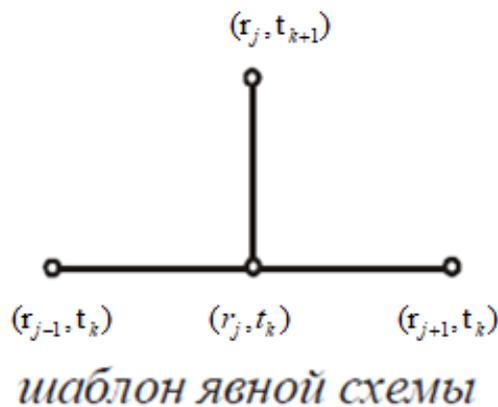


Рисунок 1 – Шаблон явной схемы

В силу центральной симметрии $w_{-1}^k = w_1^k$. Запишем разностную схему для задачи (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{h_t} = \frac{H}{c} \left(\frac{w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right) - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k + \frac{\beta}{c} I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ \frac{w_0^{k+1} - w_0^k}{h_t} = \frac{4H}{c} \frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k + \frac{\beta}{c} I(r_0), k = \overline{0, K}, \\ k \frac{w_I^k + w_{I-1}^k}{h_r} = 0, k = \overline{0, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Приведем полученную явную схему с использованием группировки слагаемых и замены для написания кода программы с учетом замены

$$\gamma = \frac{Hh_t}{ch_r^2}, \xi = \frac{2\alpha h_t}{cl}:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i^{k+1} = w_i^k + \gamma (w_{i+1}^k - 2w_i^k + w_{i-1}^k) + \frac{\gamma h_r}{r_i} (w_i^k - w_{i-1}^k) - \xi w_i^k + \frac{\beta h_t}{c} I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_0^{k+1} = w_0^k + 4\gamma (w_1^k - w_0^k) - \xi w_0^k + \frac{\beta h_t}{c} I(r_0), k = \overline{0, K}, \\ w_I^k = w_{I-1}^k, k = \overline{0, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}, \end{array} \right.$$

3 ПРОСТЕЙШАЯ НЕЯВНАЯ СХЕМА

Для построения неявной разностной схемы для задачи (5) воспользуемся сеткой (6).

На рисунке 2 продемонстрирован шаблон неявной разностной схемы.

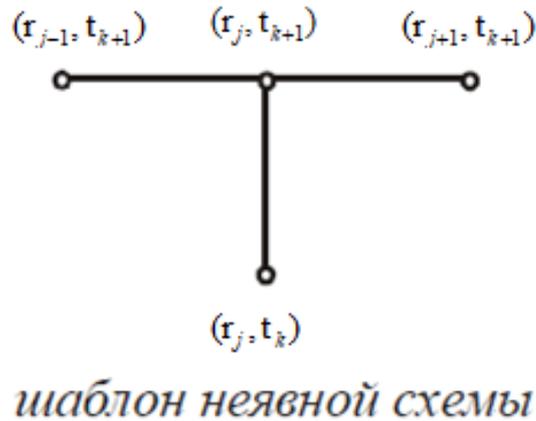


Рисунок 2 – Шаблон неявной схемы

Заменим производные следующими разностными отношениями:

$$\frac{dw}{dt} \approx \frac{w(r_i, t_k) - w(r_i, t_{k-1})}{h_t},$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} \approx \frac{w(r_{i-1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i+1}, t_k))}{h_r^2},$$

$$\frac{dw}{dr} \approx \frac{w(r_i, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{h_r}.$$

В силу центральной симметрии $w_{-1}^k = w_1^k$, $w_{l-2}^k = w_l^k$. Также используем краевое условие при $r = R$. Запишем разностную схему для задачи (5):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} = \frac{4H}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k + \frac{\beta}{c} I(r_0), k = \overline{1, K}, \\
\frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k + \\
+ \frac{\beta}{c} I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\
\frac{w_{I-1}^k - w_{I-1}^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{I-2}^k - w_{I-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_{I-1}} \frac{w_{I-1}^k - w_{I-2}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_{I-1}^k + \\
+ \frac{\beta}{c} I(r_{I-1}), k = \overline{1, K}, \\
w_i^0 = 0, i = \overline{1, I-2}.
\end{array} \right. \quad (8)$$

Умножив обе части уравнений разностной схемы на h_t , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
w_0^k - w_0^{k-1} = \frac{4Hh_t}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_0), k = \overline{1, K}, \\
w_i^k - w_i^{k-1} = \frac{Hh_t}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\
w_{I-1}^k - w_{I-1}^{k-1} = \frac{Hh_t}{c} \left[\frac{w_{I-2}^k - w_{I-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_{I-1}} \frac{w_{I-1}^k - w_{I-2}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_{I-1}^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_{I-1}), k = \overline{1, K}, \\
w_i^0 = 0, i = \overline{1, I-2}.
\end{array} \right.$$

Для дальнейшего упрощения сделаем замену $d = \frac{2\alpha}{cl}$, $g = \frac{k}{c}$,

$$f(r_i) = \frac{\beta}{c} I(r_i):$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
w_0^k - w_0^{k-1} = 4gh_t \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - dh_t w_0^k + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\
w_i^k - w_i^{k-1} = gh_t \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right] - dh_t w_i^k + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\
w_{I-1}^k - w_{I-1}^{k-1} = gh_t \left[\frac{w_{I-2}^k - w_{I-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_{I-1}} \frac{w_{I-1}^k - w_{I-2}^k}{h_r} \right] - dh_t w_{I-1}^k + h_t f(r_{I-1}), k = \overline{1, K}, \\
w_i^0 = 0, i = \overline{1, I-2}.
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k - 4gh_t \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] + dh_t w_0^k = w_0^{k-1} + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k - gh_t \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right] + dh_t w_i^k = w_i^{k-1} + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_{I-1}^k - gh_t \left[\frac{w_{I-2}^k - w_{I-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_{I-1}} \frac{w_{I-1}^k - w_{I-2}^k}{h_r} \right] + dh_t w_{I-1}^k = w_{I-1}^{k-1} + h_t f(r_{I-1}), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{1, I-2}. \end{array} \right.$$

Раскрываем скобки и группируем слагаемые:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k \left(1 + \frac{4gh_t}{h_r^2} + dh_t \right) - w_1^k \frac{4gh_t}{h_r^2} = w_0^{k-1} + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k \left(1 + \frac{2gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_i h_r} + dh_t \right) - w_{i-1}^k \left(\frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_i h_r} \right) - w_{i+1}^k \frac{gh_t}{h_r^2} = w_i^{k-1} + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_{I-1}^k \left(1 + \frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_{I-1} h_r} + dh_t \right) - w_{I-2}^k \left(\frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_{I-1} h_r} \right) = w_{I-1}^{k-1} + h_t f(r_{I-1}), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{1, I-2}. \end{array} \right.$$

Для решения методом прогонки заменим выражения в скобках:

$$1 + \frac{4gh_t}{h_r^2} + dh_t = p_0, \quad \frac{4gh_t}{h_r^2} = q_0, \quad w_0^{k-1} + h_t f(r_0) = s_0, \quad 1 + \frac{2gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_i h_r} + dh_t = p_i, \quad \frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{gh_t}{r_i h_r} = h_i,$$

$$\frac{gh_t}{h_r^2} = q_i, \quad w_i^{k-1} + h_t f(r_i) = s_i.$$

4 НЕЯВНАЯ СХЕМА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Для построения неявной разностной схемы с центральным аналогом для задачи (5) воспользуемся сеткой (6). Заменяем производные следующими разностными отношениями:

$$\frac{dw}{dt} \approx \frac{w(r_i, t_k) - w(r_i, t_{k-1})}{h_t},$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} \approx \frac{w(r_{i-1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i+1}, t_k))}{h_r^2},$$

$$\frac{dw}{dr} \approx \frac{w(r_{i+1}, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{2h_r}.$$

В силу центральной симметрии $w_{-1}^k = w_1^k$, $w_{I-1}^k = w_{I+1}^k$. Также используем краевое условие при $r = R$. Запишем разностную схему для задачи (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} = \frac{4H}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k + \frac{\beta}{c} I(r_0), k = \overline{1, K}, \\ \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} \right] + \frac{1}{r_i} \left[\frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k + \\ + \frac{\beta}{c} I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{2H}{c} \left[\frac{w_{I-1}^k - w_I^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_I^k + \frac{\beta}{c} I(r_I), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Умножим обе части уравнений на h_t , получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k - w_0^{k-1} = \frac{4Hh_t}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k - w_i^{k-1} = \frac{Hh_t}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} \right] + \frac{h_t}{r_i} \left[\frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_I^k - w_I^{k-1} = \frac{2Hh_t}{c} \left[\frac{w_{I-1}^k - w_I^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_I^k h_t + \frac{\beta}{c} h_t I(r_I), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right.$$

Проведем замену $d = \frac{2\alpha}{cl}$, $g = \frac{k}{c}$, $f(r_i) = \frac{\beta}{c} I(r_i)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k - w_0^{k-1} = 4gh_t \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - dh_t w_0^k + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k - w_i^{k-1} = gh_t \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} \right] + \frac{h_t}{r_i} \left[\frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_r} \right] - dh_t w_i^k + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_I^k - w_I^{k-1} = 2gh_t \left[\frac{w_{I-1}^k - w_I^k}{h_r^2} \right] - dh_t w_I^k + h_t f(r_I), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k - 4gh_t \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] + dh_t w_0^k = w_0^{k-1} + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k - gh_t \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} \right] - \frac{1}{r_i} \left[\frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_r} \right] + dh_t w_i^k = w_i^{k-1} + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_{I-1}^k - 2gh_t \left[\frac{w_{I-1}^k - w_I^k}{h_r^2} \right] + dh_t w_{I-1}^k = w_{I-1}^{k-1} + h_t f(r_I), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right.$$

Раскрываем скобки и группируем слагаемые:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0^k \left(1 + \frac{4gh_t}{h_r^2} + dh_t \right) - w_1^k \frac{4gh_t}{h_r^2} = w_0^{k-1} + h_t f(r_0), k = \overline{1, K}, \\ w_i^k \left(1 + \frac{2gh_t}{h_r^2} + dh_t \right) - w_{i-1}^k \left(\frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{h_t}{2r_i h_r} \right) - w_{i+1}^k \left(\frac{gh_t}{h_r^2} + \frac{h_t}{2r_i h_r} \right) = w_i^{k-1} + h_t f(r_i), i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}, \\ w_I^k \left(1 + 2\frac{gh_t}{h_r^2} + dh_t \right) - w_{I-1}^k \frac{2gh_t}{h_r^2} = w_I^{k-1} + h_t f(r_I), k = \overline{1, K}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I}. \end{array} \right.$$

Для решения методом прогонки заменим выражения в скобках:

$$1 + \frac{4gh_t}{h_r^2} + dh_t = p_0, \quad \frac{4gh_t}{h_r^2} = q_0, \quad w_0^{k-1} + h_t f(r_0) = s_0, \quad 1 + \frac{2gh_t}{h_r^2} + dh_t = p_t, \quad \frac{gh_t}{h_r^2} - \frac{h_t}{2r_t h_r} = h_t,$$

$$\frac{gh_t}{h_r^2} + \frac{h_t}{2r_t h_r} = q_t, \quad w_i^{k-1} + h_t f(r_i) = s_i.$$

5 ИССЛЕДОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИИ

5.1 Исследование аппроксимации простейшей явной схемы

Рассмотрим уравнение разностной схемы (7) и проведем исследование аппроксимации. Проведем разложение по формуле Тейлора значений $w(r_i, t_{k+1})$, $w(r_{i+1}, t_k)$, $w(r_{i-1}, t_k)$ в точке $w(r_i, t_k)$ и учтем эти разложения в выражении невязки.

$$w(r_i, t_{k+1}) = [w + w'_t h_t + w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3)]_{(r_i, t_k)},$$

$$w(r_{i+1}, t_k) = [w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)]_{(r_i, t_k)},$$

$$w(r_{i-1}, t_k) = [w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)]_{(r_i, t_k)}.$$

Запишем невязку для первого уравнения системы:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \{L_h^1[w] - f_h^1\}_{(r_i, t_k)} = \frac{w(r_i, t_{k+1}) - w(r_i, t_k)}{h_t} - \frac{H}{c} \left[\frac{w(r_{i-1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i+1}, t_k))}{h_r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r_i} \frac{w(r_i, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{h_r} \Big] - \frac{2\alpha}{cl} w(r_i, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_i) = \left\{ \frac{w + w'_t h_t + w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3) - w}{h_t} - \right. \\ &- \frac{H}{c} \left[\frac{w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - 2w + w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r_i} \frac{w - w + w'_r h_r - w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r} \Big] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = \{w'_t + w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \\ &- \frac{H}{c} [w''_{rr} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{12} + O(h_r^3)] + \frac{1}{r_i} (w'_r - w''_{rr} \frac{h_r}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^3}{24} + O(h_r^4)) \Big\} + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = \\ &= [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \{w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{H}{c} [w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{12} + O(h_r^3)] + \frac{1}{r_i} (w''_{rr} \frac{h_r}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{6} - \\ &- w''''_{rrrr} \frac{h_r^3}{24} + O(h_r^4)) \Big\}_{(r_i, t_k)} = O(h_t, h_r). \end{aligned}$$

Запишем невязку для второго уравнения системы:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^2 \Big|_{(r_0, t_k)} &= \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{(r_0, t_k)} = \frac{w(r_0, t_{k+1}) - w(r_0, t_k)}{h_t} - \frac{4H}{c} \frac{w(r_1, t_k) - w(r_0, t_k)}{h_r^2} - \frac{2\alpha}{cl} w(r_0, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_0) = \\
&= \left\{ \frac{w + w'_t h_t + w''_t \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3) - w}{h_t} - \frac{4H}{c} \left[\frac{w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w}{h_r^2} \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \right. \\
&\left. - \frac{\beta}{c} I(r_0) \right\}_{(r_0, t_k)} = \left\{ w'_t + w''_t \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{4H}{c} \left[\frac{w'_r}{h_r} + \frac{w''_{rr}}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_0) \right\}_{(r_0, t_k)} = \\
&= \left[w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r) \right] = \left\{ w''_t \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{4H}{c} \left[w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) \right] \right\}_{(r_0, t_k)} = O(h_t, h_r^2).
\end{aligned}$$

Запишем невязку для третьего уравнения системы:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^3 \Big|_{(r_l, t_k)} &= \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{(r_l, t_k)} = \frac{H}{h_r} [w(r_l, t_k) - w(r_{l-1}, t_k)] = \left\{ \frac{H}{h_r} \left[w - w + w'_r h_r - w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + \right. \right. \\
&\left. \left. + O(h_r^5) \right] \right\}_{(r_l, t_k)} = \{H[w'_r - w''_{rr} \frac{h_r}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^3}{24} + O(h_r^4)]\}_{(r_l, t_k)} = O(h_r).
\end{aligned}$$

Запишем невязку для четвертого уравнения системы:

$$\delta f_h^4 \Big|_{(r_i, t_0)} = \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{(r_i, t_0)} = w(r_i, t_0) = 0.$$

Вычислим порядок аппроксимации явной схемы. Для этого применим равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в схему.

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \{O(h_t, h_r), O(h_t, h_r^2), O(h_r), 0\} = O(h_t, h_r).$$

Для простейшей явной схемы уравнения теплопроводности получили линейный порядок аппроксимации для временной переменной и для пространственной переменной.

5.2 Исследование аппроксимации неявной разностной схемы

Рассмотрим уравнение разностной схемы (8) и проведем исследование аппроксимации. Проведем разложение по формуле Тейлора значений $w(r_i, t_{k-1})$, $w(r_{i-1}, t_k)$ в точке $w(r_i, t_k)$ и учтем эти разложения в выражении невязки.

$$w(r_i, t_{k-1}) = [w - w'_t h_t + w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} - w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} + O(h_t^4)]_{(r_i, t_k)},$$

$$w(r_{i-1}, t_k) = [w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)]_{(r_i, t_k)}.$$

Запишем невязку для первого уравнения системы:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \{L_h^1[w]_h - f_h^1\}_{(r_i, t_k)} = \frac{w(r_i, t_k) - w(r_i, t_{k-1})}{h_t} - \frac{H}{c} \left[\frac{w(r_{i-1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i+1}, t_k))}{h_r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r_i} \frac{w(r_i, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{h_r} \left. \right] - \frac{2\alpha}{cl} w(r_i, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_i) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3)}{h_t} - \right. \\ &- \frac{H}{c} \left[\frac{w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - 2w + w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r_i} \frac{w - w + w'_r h_r - w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r} \left. \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = \left\{ w'_t - w''_{tt} \frac{h_t}{2} + \right. \\ &+ O(h_t^2) - \frac{H}{c} [w''_{rr} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{12} + O(h_r^3)] + \frac{1}{r_i} (w'_r - w''_{rr} \frac{h_r}{2} + O(h_r^2)) \left. \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = \\ &= [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \left\{ -w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{H}{c} [w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{12} + O(h_r^3)] + \frac{1}{r_i} (-w''_{rr} \frac{h_r}{2} + \right. \\ &+ O(h_r^2)) \Big\}_{(r_i, t_k)} = O(h_t, h_r). \end{aligned}$$

Запишем невязку для второго уравнения системы:

$$\begin{aligned} \delta f_h^2 \Big|_{(r_0, t_k)} &= \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{(r_0, t_k)} = \frac{w(r_0, t_k) - w(r_0, t_{k-1})}{h_t} - \frac{4H}{c} \frac{w(r_1, t_k) - w(r_0, t_k)}{h_r^2} - \frac{2\alpha}{cl} w(r_0, t_k) + \\ &+ \frac{\beta}{c} I(r_0) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} - w''''_{tttt} \frac{h_t^4}{24} + O(h_t^5)}{h_t} - \right. \\ &- \frac{4H}{c} \frac{w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w}{h_r^2} + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_0) \Big\}_{(r_0, t_k)} = \\ &= [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \left\{ -w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{4H}{c} [w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3)] \right\}_{(r_0, t_k)} = \\ &= O(h_t, h_r^2). \end{aligned}$$

Запишем невязку для третьего уравнения системы:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^3 \Big|_{(r_{l-1}, t_k)} &= \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{(r_{l-1}, t_k)} = \frac{w(r_{l-1}, t_k) - w(r_{l-1}, t_{k-1})}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w(r_{l-2}, t_k) - w(r_{l-1}, t_k)}{h_r^2} + \right. \\
&+ \frac{1}{r_{l-1}} \frac{w(r_{l-1}, t_k) - w(r_{l-2}, t_k)}{h_r} \Big] - \frac{2\alpha}{cl} w(r_{l-1}, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + O(h_t^3)}{h_t} - \right. \\
&- \frac{H}{c} \left[\frac{w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w}{h_r^2} + \right. \\
&+ \frac{1}{r_{l-1}} \frac{w - w + w'_r h_r - w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r} \Big] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = \{w'_t - \\
&- w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{H}{c} \left[-\frac{w'_r}{h_r} + w''_{rr} - w'''_{rrr} \frac{h_r}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) + \frac{1}{r_{l-1}} (w'_r - w''_{rr} \frac{h_r}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{6} \right. \\
&+ O(h_r^2)) \Big] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \left\{ -w''_{tt} \frac{h_t}{2} + \right. \\
&+ O(h_t^2) - \frac{H}{c} [w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) + \frac{1}{r_{l-1}} (-w''_{rr} \frac{h_r}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{6} + O(h_r^3))] \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = O(h_t, h_r).
\end{aligned}$$

Запишем невязку для четвертого уравнения системы:

$$\delta f_h^4 \Big|_{(r, t_0)} = \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{(r, t_0)} = w(r, t_0) = 0.$$

Вычислим порядок аппроксимации неявной схемы. Для этого применим равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в схему.

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \{O(h_t, h_r), O(h_t, h_r^2), O(h_t, h_r), 0\} = O(h_t, h_r).$$

Для простейшей неявной схемы уравнения теплопроводности получили линейный порядок аппроксимации для временной переменной и для пространственной переменной.

5.3 Исследование аппроксимации неявной разностной схемы повышенного порядка аппроксимации

Рассмотрим уравнение разностной схемы (9) и проведем исследование аппроксимации. Проведем разложение по формуле Тейлора значений

$w(r_i, t_{k-1})$, $w(r_{i-1}, t_k)$, $w(r_{i+1}, t_k)$ в точке $w(r_i, t_k)$ и учтем эти разложения в выражении невязки.

$$w(r_i, t_{k-1}) = [w - w'_t h_t + w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} - w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} + w''''_{tttt} \frac{h_t^4}{24} + O(h_t^5)]_{(r_i, t_k)},$$

$$w(r_{i-1}, t_k) = [w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)]_{(r_i, t_k)},$$

$$w(r_{i+1}, t_k) = [w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)]_{(r_i, t_k)}.$$

Запишем невязку для первого уравнения системы:

$$\begin{aligned} \delta f_h^1 \Big|_{(r_i, t_k)} &= \{L_h^1[w]_h - f_h^1\}_{(r_i, t_k)} = \frac{w(r_i, t_k) - w(r_i, t_{k-1})}{h_t} - \frac{H}{c} \left[\frac{w(r_{i-1}, t_k) - 2w(r_i, t_k) + w(r_{i+1}, t_k))}{h_r^2} + \right. \\ &+ \frac{1}{r_i} \frac{w(r_i, t_k) - w(r_{i-1}, t_k)}{h_r} \Big] - \frac{2\alpha}{cl} w(r_i, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_i) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} + O(h_t^4)}{h_t} - \right. \\ &- \frac{H}{c} \left[\frac{w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - 2w + w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{h_r^2} \right] + \\ &+ \frac{H}{cr_i} \left[\frac{w + w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w + w'_r h_r - w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} - w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5)}{2h_r} \right] + \\ &+ \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = \{w'_t - w''_{tt} \frac{h_t}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{H}{c} [w''_{rr} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{12} + O(h_r^3)] - \frac{H}{cr_i} [w'_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + \\ &+ O(h_r^3)] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_i) \Big\}_{(r_i, t_k)} = [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \{-w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{H}{c} [w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{12} + \\ &+ O(h_r^3)] - \frac{H}{cr_i} [w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + O(h_r^3)] \Big\}_{(r_i, t_k)} = O(h_t, h_r^2). \end{aligned}$$

Запишем невязку для второго уравнения системы:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^2 \Big|_{(r_0, t_k)} &= \{L_h^2[w]_h - f_h^2\}_{(r_0, t_k)} = \frac{w(r_0, t_k) - w(r_0, t_{k-1})}{h_t} - \frac{4H}{c} \left[\frac{w(r_1, t_k) - w(r_0, t_k)}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w(r_0, t_k) + \\
&+ \frac{\beta}{c} I(r_0) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} - w''''_{tttt} \frac{h_t^4}{24} + O(h_t^5)}{h_t} - \right. \\
&- \frac{4H}{c} \left[\frac{w + w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w}{h_r^2} \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_0) \Big\}_{(r_0, t_k)} = \{w'_t - w''_{tt} \frac{h_t}{2} + \\
&+ w'''_{ttt} \frac{h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{4H}{c} \left[\frac{w'_r}{h_r} + \frac{w''_{rr}}{2} + w'''_{rrr} \frac{h_r}{3} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_0) \Big\}_{(r_0, t_k)} = \\
&= [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \{-w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{4H}{c} [w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3)] \Big\}_{(r_0, t_k)} = O(h_t, h_r^2).
\end{aligned}$$

Запишем невязку для третьего уравнения системы:

$$\begin{aligned}
\delta f_h^3 \Big|_{(r_{l-1}, t_k)} &= \{L_h^3[w]_h - f_h^3\}_{(r_{l-1}, t_k)} = \frac{w(r_{l-1}, t_k) - w(r_{l-1}, t_{k-1})}{h_t} - \frac{H}{c} \left[\frac{w(r_{l-2}, t_k) - w(r_{l-1}, t_k)}{h_r^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{r_{l-1}} \frac{w(r_{l-1}, t_k) - w(r_{l-2}, t_k)}{h_r} - \frac{2\alpha}{cl} w(r_{l-1}, t_k) + \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) = \left\{ \frac{w - w + w'_t h_t - w''_{tt} \frac{h_t^2}{2} + w'''_{ttt} \frac{h_t^3}{6} + O(h_t^4)}{h_t} - \right. \\
&- \frac{2H}{c} \left[\frac{w - w'_r h_r + w''_{rr} \frac{h_r^2}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r^3}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^4}{24} + O(h_r^5) - w}{h_r^2} \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = \{w'_t - w''_{tt} \frac{h_t}{2} + \\
&+ w'''_{ttt} \frac{h_t^2}{6} + O(h_t^3) - \frac{2H}{c} \left[-\frac{w'_r}{h_r} + \frac{w''_{rr}}{2} - w'''_{rrr} \frac{h_r}{6} + w''''_{rrrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3) \right] + \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r_{l-1}) \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = \\
&= [w'_t = \frac{H}{c} (w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r) - \frac{2\alpha}{cl} w - \frac{\beta}{c} I(r)] = \{-w''_{tt} \frac{h_t}{2} + O(h_t^2) - \frac{2H}{c} [w'''_{rrr} \frac{h_r^2}{24} + O(h_r^3)] \Big\}_{(r_{l-1}, t_k)} = O(h_t, h_r^2).
\end{aligned}$$

Запишем невязку для четвертого уравнения системы:

$$\delta f_h^4 \Big|_{(r_i, t_0)} = \{L_h^4[w]_h - f_h^4\}_{(r_i, t_0)} = w(r_i, t_0) = 0.$$

Вычислим порядок аппроксимации неявной схемы с центральным аналогом. Для этого применим равномерную норму к порядкам аппроксимации всех выражений, входящих в схему.

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \{O(h_t, h_r^2), O(h_t, h_r^2), O(h_t, h_r), 0\} = O(h_t, h_r^2).$$

Для неявной схемы с центральным аналогом уравнения теплопроводности получили линейный порядок аппроксимации для

временной переменной и квадратичный порядок аппроксимации для пространственной переменной.

6 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

6.1 Исследование устойчивости неявной разностной схемы

Исследуем устойчивость неявной разностной схемы. Добавим возмущение и представим схему (8) в виде:

$$\begin{cases} \frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} = \frac{4H}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k + \varphi_0^k, \\ \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k + \varphi_i^k, \\ \frac{w_{I-1}^k - w_{I-1}^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{I-2}^k - w_{I-1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_{I-1}} \frac{w_{I-1}^k - w_{I-2}^k}{h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_{I-1}^k + \varphi_{I-1}^k, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Схема будет устойчивой, если:

$$\|w_h\|_{W_h} \leq C \|\delta f_h\|_{F_h},$$

где f_h – возмущение правой части задачи, w_h – отклик решения на это возмущение, C – положительная константа, не зависящая от шагов сетки и возмущений правых частей.

Запишем схему в неявном виде с учетом замены $\gamma = \frac{Hh_t}{ch_r^2}$, $q = \frac{2\alpha h_t}{cl}$:

$$\begin{cases} w_0^k(1 + 4\gamma + q) = 4\gamma w_1^k + w_0^{k-1} + \varphi_0^k h_t, \\ w_i^k(1 + 2\gamma + q) = \frac{Hh_t}{cr_i h_r} w_i^k + w_i^{k-1} + w_{i-1}^k \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \right) + \gamma w_{i+1}^k + \varphi_i^k h_t, \\ w_{I-1}^k(1 + \gamma + q) = \frac{Hh_t}{cr_{I-1} h_r} w_{I-1}^k + w_{I-1}^{k-1} + w_{I-2}^k \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_{I-1} h_r} \right) + \varphi_{I-1}^k h_t, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Применим неравенство треугольника:

$$\left\{ \begin{array}{l} |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma |w_1^k| + |w_0^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_i^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \frac{Hh_t}{cr_i h_r} |w_i^k| + |w_i^{k-1}| + |w_{i-1}^k| \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \right) + \gamma |w_{i+1}^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_{I-1}^k| (1 + \gamma + q) \leq \frac{Hh_t}{cr_i h_r} |w_{I-1}^k| + |w_{I-1}^{k-1}| + |w_{I-2}^k| \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \right) + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{array} \right.$$

Определим нормы в пространствах W_h и F_h :

$$\|w_h\|_{W_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |w_i^k|, \quad \|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=\overline{1, K}}} |\varphi_i^k|.$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} |w_i^k| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k|, i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}, \\ |w_i^{k-1}| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}|, i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}, \\ |\varphi_i^k| &\leq \|f_h\|_{F_h}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |w_i^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \right) + \gamma \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_{I-1}^k| (1 + \gamma + q) \leq \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| \left(\gamma - \frac{Hh_t}{cr_i h_r} \right) + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{array} \right.$$

После сокращения схема примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} |w_i^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_{I-1}^k| (1 + \gamma + q) \leq \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^{k-1}| + \gamma \max_{j=\overline{0, I-1}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{array} \right.$$

Так как правая часть не зависит от i , то данные неравенства справедливы и для максимальных левых частей по i . Тогда схема примет вид:

$$\begin{cases} \max_{j=1, I-2} |w_j^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_{I-1}^k| (1 + \gamma + q) \leq \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + \gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Уравняем коэффициенты неравенств в правых частях.

$$\begin{cases} \max_{j=1, I-2} |w_j^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_{I-1}^k| (1 + \gamma + q) \leq \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + \gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Учитывая, что правые части неравенств одинаковые, то можно записать одним неравенством:

$$\begin{cases} \max_{j=0, I-1} |w_j^k| (1 + 4\gamma + q) \leq \max_{j=0, I-1} |w_j^{k-1}| + 4\gamma \max_{j=0, I-1} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

После упрощения неравенства, будем иметь:

$$|w_i^k| \leq \frac{1}{1+q} \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Так как $\frac{1}{1+q} < 1$, то получим

$$|w_i^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Теперь запишем неравенство при конкретном значении k . При $k = 1$:

$$|w_i^1| \leq \max_{j=0, I} |w_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq \max_{j=0, I} |w_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Учитывая, что $\max_{j=0, I} \{|w_j^0|\} \leq \|f_h\|_{F_h}$, получим:

$$|w_i^1| \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Пусть $k = 2$, тогда:

$$|w_i^2| \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Действуя аналогичным образом, при $k = K$ получим оценку:

$$|w_i^K| \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Далее, воспользуемся формулой для нормы $\|w_h\|_{U_h}$ и полученной оценкой:

$$\|w_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=0, I-1 \\ k=1, K}} |w_i^k| \leq \max_{k=1, K} (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Таким образом, неявная конечно-разностная схема является безусловно устойчивой.

6.2 Исследование устойчивости неявной разностной схемы повышенного порядка аппроксимации

Исследуем устойчивость неявной разностной схемы. Добавим возмущение и представим схему (9) в виде:

$$\begin{cases} \frac{w_0^k - w_0^{k-1}}{h_t} = \frac{4H}{c} \left[\frac{w_1^k - w_0^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_0^k + \varphi_0^k, \\ \frac{w_i^k - w_i^{k-1}}{h_t} = \frac{H}{c} \left[\frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{h_r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2h_r} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_i^k + \varphi_i^k, \\ \frac{w_I^k - w_I^{k-1}}{h_t} = \frac{2H}{c} \left[\frac{w_{I-1}^k - w_I^k}{h_r^2} \right] - \frac{2\alpha}{cl} w_I^k + \varphi_I^k, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Схема будет устойчивой, если:

$$\|w_h\|_{W_h} \leq C \|\delta f_h\|_{F_h},$$

где f_h – возмущение правой части задачи, w_h – отклик решения на это возмущение, C – положительная константа, не зависящая от шагов сетки и возмущений правых частей.

Запишем схему в неявном виде с учетом замены $\gamma = \frac{Hh_t}{ch_r^2}, q = \frac{2\alpha h_t}{cl}$:

$$\begin{cases} w_0^k(1+4\gamma+q) = 4\gamma w_1^k + w_0^{k-1} + \varphi_0^k h_t, \\ w_i^k(1+2\gamma+q) = w_i^{k-1} + w_{i-1}^k \left(\gamma - \frac{H}{2cr_i h_r}\right) + w_{i+1}^k \left(\gamma + \frac{H}{2cr_i h_r}\right) + \varphi_i^k h_t, \\ w_I^k(1+2\gamma+q) = w_I^{k-1} + 2\gamma w_{I-1}^k + \varphi_I^k h_t, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Применим неравенство треугольника:

$$\begin{cases} |w_0^k|(1+4\gamma+q) \leq 4\gamma |w_1^k| + |w_0^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_i^k|(1+2\gamma+q) \leq |w_i^{k-1}| + |w_{i-1}^k| \left(\gamma - \frac{H}{2cr_i h_r}\right) + |w_{i+1}^k| \left(\gamma + \frac{H}{2cr_i h_r}\right) + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_I^k|(1+2\gamma+q) \leq |w_I^{k-1}| + 2\gamma |w_{I-1}^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}. \end{cases}$$

Определим нормы в пространствах W_h и F_h :

$$\|w_h\|_{W_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I-1} \\ k=1, K}} |w_i^k|, \quad \|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=1, K}} |\varphi_i^k|.$$

Воспользуемся оценками:

$$\begin{aligned} |w_i^k| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k|, i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}, \\ |w_i^{k-1}| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}|, i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}, \\ |\varphi_i^k| &\leq \|f_h\|_{F_h}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |w_i^k|(1+2\gamma+q) \leq 2 \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| \left(\gamma - \frac{Hh_t}{2cr_i h_r}\right) + \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| \left(\gamma + \frac{Hh_t}{2cr_i h_r}\right) + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k|(1+4\gamma+q) \leq 4\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| + \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_I^k|(1+2\gamma+q) \leq \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

После сокращения схема примет вид:

$$\begin{cases} |w_i^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_I^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

Так как правая часть не зависит от i , то данные неравенства справедливы и для максимальных левых частей по i . Тогда схема примет вид:

$$\begin{cases} \max_{j=1, I-1} |w_j^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_I^k| (1 + 2\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max_{j=1, I-1} |w_j^k| (1 + 4\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_0^k| (1 + 4\gamma + q) \leq 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ |w_I^k| (1 + 4\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max_{j=0, I} |w_j^k| (1 + 4\gamma + q) \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + 4\gamma \max_{j=0, I} |w_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h}, \\ w_i^0 = 0, i = \overline{0, I-1}. \end{cases}$$

После упрощения неравенства будем иметь:

$$|w_i^k| \leq \frac{1}{1+q} \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Так как $\frac{1}{1+q} < 1$, то получим:

$$|w_i^k| \leq \max_{j=0, I} |w_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Теперь запишем неравенство при конкретных значения k . При $k = 1$:

$$|w_i^1| \leq \max_{j=0, I} |w_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq \max_{j=0, I} |\psi_j| + h_t \|f_h\|_{F_h}.$$

Учитывая, что $\max_{j=1, I} \{\|\psi_j\|\}_{F_h} \leq \|f_h\|_{F_h}$, получим:

$$|w_i^1| \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

При $k = 2$:

$$|w_i^2| \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Действуя аналогичным образом, при $k = K$ получим оценку:

$$|w_i^K| \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}.$$

Далее, воспользуемся формулой для нормы $\|w_h\|_{U_h}$ и полученной оценкой:

$$\|w_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=0, I-1 \\ k=1, K}} |w_i^k| \leq \max_{k=1, K} (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h}$$

Таким образом, неявная конечно-разностная схема является безусловно устойчивой.

7 РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Реализуем программу на языке Python, обеспечивающую расчет и графическую визуализацию нагрева элемента на временном промежутке 0 до T на основе разностных схем (7), (8), (9).

На рисунке 1 приведен интерфейс программы, где выведены текущие параметры, выданные преподавателем. Для смены параметров, пользователю необходимо ввести Yes, а затем точность.

```
Текущие параметры
R = 5 l = 0.5 k = 0.065
alfa = 0.01 c = 1.84 beta = 0.004
P = 40, a = 1
Введите Yes, если хотите изменить параметры
Введите количество шагов по R 5000
и по T 100
Введите момент времени 35
Подождите, пожалуйста, выполняются вычисления...
```

Рисунок 3– Интерфейс программы

На рисунке 4, 5 и 6 приведен график зависимости температуры от радиуса для неявной схемы и неявной с центральным аналогом.

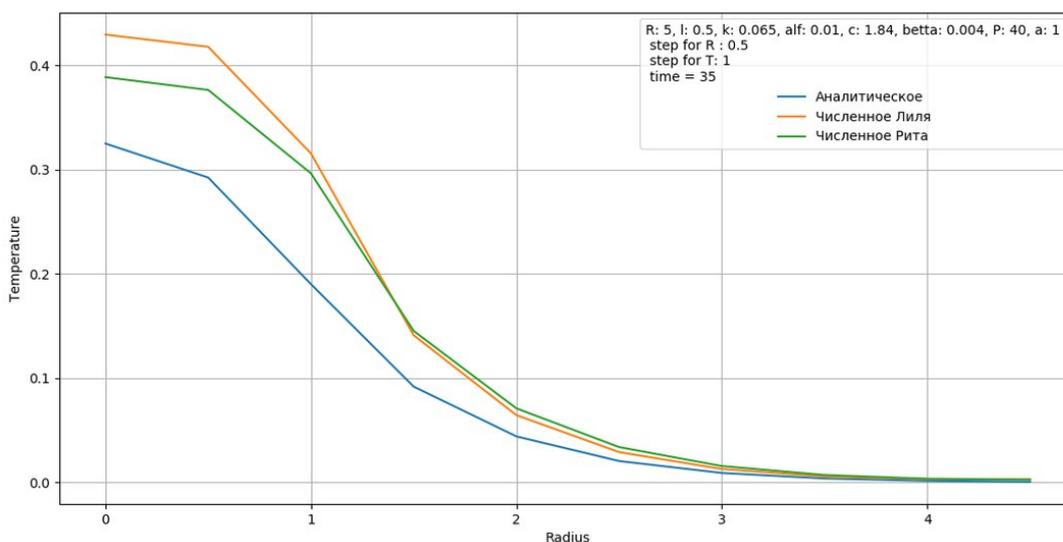


Рисунок 4 – График численного и аналитического решения при $t = 35$,

$$0 < k < 100, 0 < i < 10$$

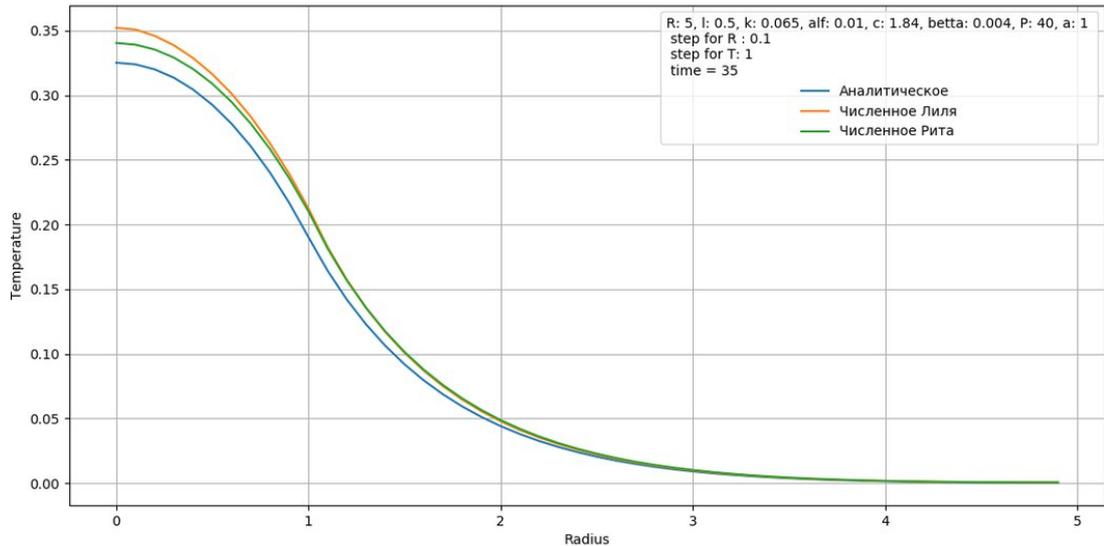


Рисунок 5 – График численного и аналитического решения при $t = 35$,
 $0 < k < 100, 0 < i < 50$

Figure 1

— □ ×

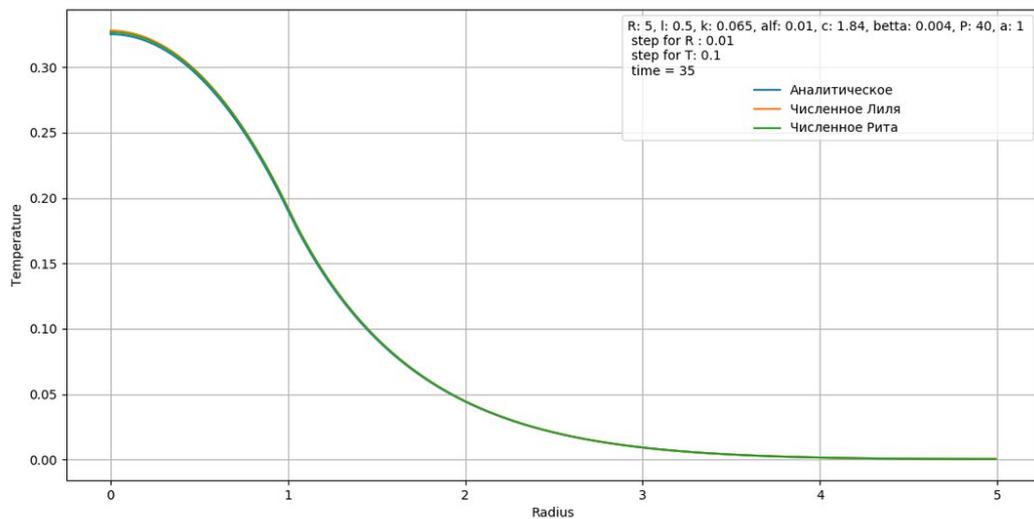


Рисунок 6 – График численного и аналитического решения Лиля при $t = 35$,
 $0 < k < 1000, 0 < i < 500$

Исходя из результатов работы программы, показанных на рисунке 4, будем увеличивать количество шагов по R и T . Как видно из рисунков 5 и 6, при увеличении количества интервалов дробления, заметна визуальная сходимость.

На рисунке 7, 8 и 9 приведен график зависимости температуры от радиуса для явной схемы.

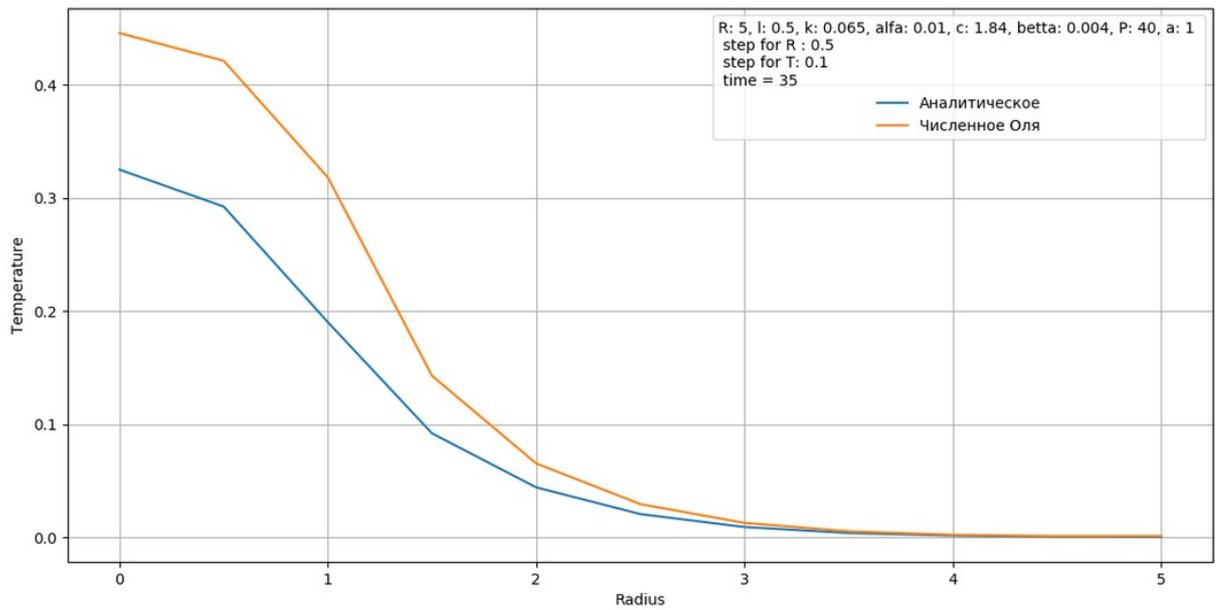


Рисунок 7 – График численного и аналитического решения при $t = 35$,
 $0 < k < 1000, 0 < i < 10$

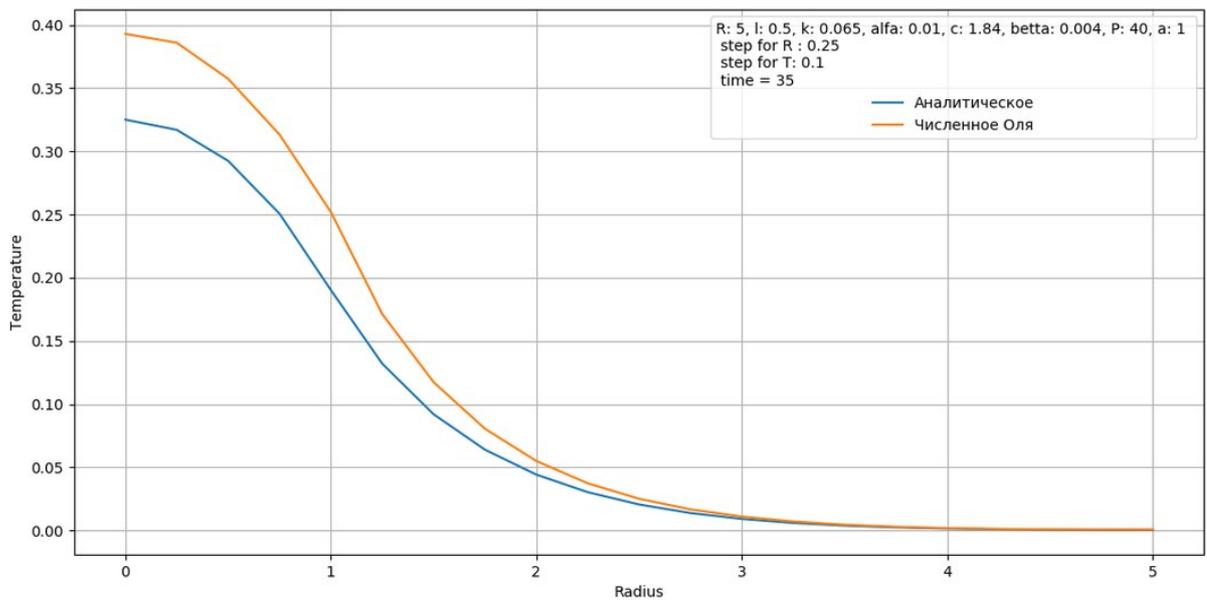


Рисунок 8 – График численного и аналитического решения при $t = 35$,
 $0 < k < 1000, 0 < i < 20$

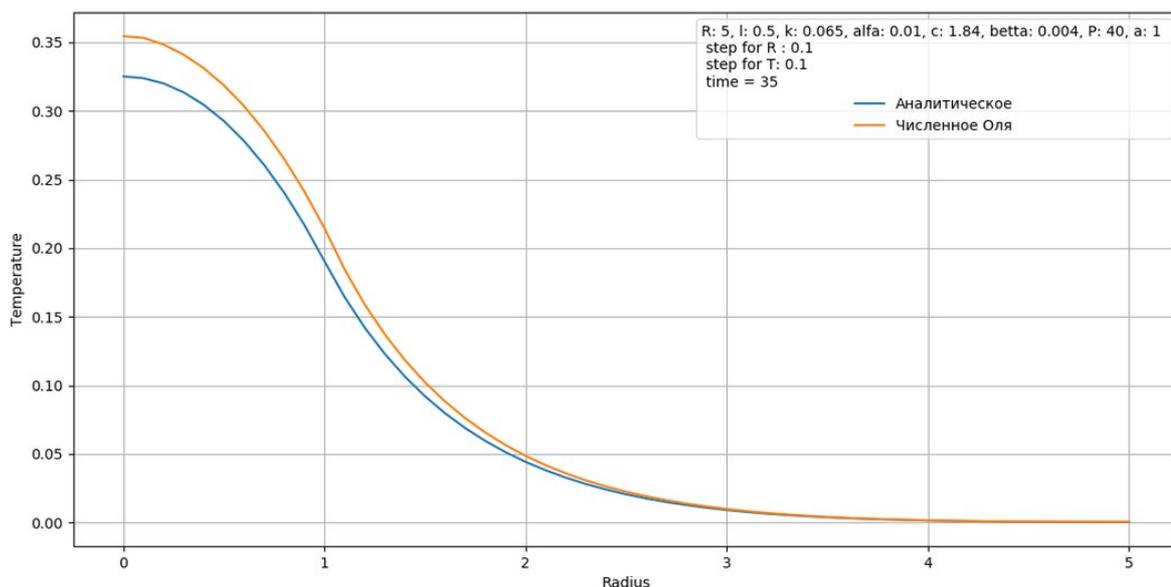


Рисунок 9 – График численного и аналитического решения при $t = 35$,
 $0 < k < 1000, 0 < i < 50$

Исходя из результатов работы программы, показанных на рисунке 7, будем увеличивать количество шагов по R и T. Как видно из рисунков 8 и 9, при увеличении количества интервалов дробления, заметна визуальная сходимость. При этом визуальная сходимость на явной схеме имеет меньшую скорость сходимости.

Проведем экспериментальную проверку аппроксимации. Для этого проведем расчет ошибки между аналитическим и численным решениями в трех разных узлах на сетках разной мелкости. Результаты приведены в таблицах 1, 2 и 3.

Таблица 1 -Результаты вычислительного эксперимента для неявной схемы

K	I	$\varepsilon(h_t, h_r)$	$\varepsilon(h_t, h_r) / \varepsilon(\frac{h_t}{2}, \frac{h_r}{2})$
50	10	0.166	-
100	20	0.087	1.91
200	40	0.045	1.93
400	80	0.023	1.96

Таблица 2 - Результаты вычислительного эксперимента для неявной схемы повышенного порядка аппроксимации

К	I	$\varepsilon(h_t, h_r^2)$	$\varepsilon(h_t, h_r) / \varepsilon(\frac{h_t}{4}, \frac{h_r}{2})$
50	5	0.252	-
100	20	0.066	3.85
200	80	0.016	4.09
400	320	0.004	4.06

Однако реальные результаты отличаются от ожидаемых. Теоретический вывод о характере погрешности не подтвердился экспериментально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в оптическом элементе. Для численного решения краевой задачи построены три разностные схемы: простейшая явная схема, неявная схема, неявная схема повышенного порядка аппроксимации.

Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что явная схема и неявная схема имеют линейный порядок аппроксимации для временной переменной и для пространственной переменной, а неявная схема с центральным аналогом имеют линейный порядок аппроксимации для временной переменной и квадратичный порядок аппроксимации для пространственной переменной. Также в результате исследования установлено, что неявная схема и неявная схема с центральным аналогом являются устойчивыми.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что фактическая погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью разностной схемы, убывает с измельчением шагов сетки. При этом порядки убывания погрешности численного решения оказались ниже порядков, полученных при теоретическом исследовании.

В результате серии вычислительных экспериментов заметна визуальная сходимость разностного решения, вычисляемого с помощью схем, при увеличении количества шагов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) [Текст]/Тихонов А.Н., Самарский А.А. М.: Наука, 1977.- 742 с.
2. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики [Текст]/М.М. Смирнов. - М.: Наука, 1975.
3. Егоров В.И Точные методы решения задач теплопроводности.- Учебное пособие // Егоров В.И. –М: СПб ГУ ИТМО, 2006.- 48с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. Уравнения в частных производных математической физики.- Учебное пособие // Кошляков Н.С.- М:Высшая школа, 1970.-712.
5. Численные методы математической физики:[учеб.пособие для вузов по специальности «Прикладная математика и информатика»] / А.А.Дегтярев. – Самара: Изд-во Сам.ун-та, 2011. – 83 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

Простейшая явная схема.

```
import math
import time
import numpy as np
import yt.mathmethods as mm

def ir(ri):
    if(ri <= mm.da['a']):
        a = mm.da['P']/(math.pi*mm.da['a']**2)
        return a
    return 0

def psi(ht):
    return 2 * mm.da['alf'] * ht / (mm.da['c'] * mm.da['l'])

def gamma(ht, hr):
    return mm.da['k'] * ht / (mm.da['c'] * hr**2)

def pp0(ht, hr):
    return 1 - 4*gamma(ht, hr) - psi(ht)

def ppi(ht, hr, ri):
    return 1 - 2*gamma(ht, hr) + gamma(ht, hr) * hr/ri - psi(ht)

def uui(ht, hr, ri):
    return gamma(ht, hr) - gamma(ht, hr)*hr/ri

def ss0(ht):
    return mm.da['beta']*ht*ir(0)/mm.da['c']

def ssi(ht, ri):
    return mm.da['beta']*ht*ir(ri)/mm.da['c']

def all(w, ht, hr, ris):
    len = ris.__len__()
    g = gamma(ht,hr)
    p = psi(ht)
    cur = [w[0] + 4*g*(w[1]-w[0]) - p*w[0] + ss0(ht),]
    j=1
    for r in ris[1:len-1]:
        a = w[j]*(1 - 2*g - g*hr/r - p) + w[j-1]*g \
            + w[j+1]*(g + g*hr/r) + ssi(ht,r)
        cur.append(a)
        j+=1
    cur.append(cur[j-1])
    return cur

def xOy(args):
    tt = time.time()
    stepr, stept, riarr = args[0], args[1], args[2]
```

```

res = [np.zeros((riarr.__len__()),)]
j = 1
for k in np.arange(1, 100, stept):
res.append(all(res[j-1], stept, stepr, riarr))
j+=1
print('finish process olya' + ' {0:.2f}'.format(time.time()-tt))
return res

```

Неявная схема.

```

import math
import time
import numpy as np

import matplotlib.pyplot as mpl

from plotly.utils import numpy

import mathmethods as mm

def ir(ri):
if(ri <= mm.da['a']):
a = mm.da['P']/(math.pi*mm.da['a']**2)
return a
return 0

def psi(ht):
return 2 * mm.da['alf'] * ht / (mm.da['c'] * mm.da['l'])

def gamma(ht, hr):
return mm.da['k'] * ht / (mm.da['c'] * hr**2)

def p0(ht, hr):
return 1 + 4*gamma(ht,hr) + psi(ht)

def q0(ht, hr):
return 4*gamma(ht,hr) + 1

def s0(w, ht):
return w + mm.da['beta']*ht*ir(0)/mm.da['c']

def ppi(hr, ht, ri):
return 1+ 2*gamma(ht, hr) + psi(ht) - gamma(ht, hr)*hr/ri

def uui(ht, hr, ri):
return gamma(ht, hr) - gamma(ht, hr)*hr/ri

def qqi(ht, hr, ri):
return gamma(ht,hr)

def ssi(w, ri, ht):
return w + mm.da['beta']*ht*ir(ri)/mm.da['c']

```

```

def ul(hr, ht, ri):
return gamma(ht,hr) - gamma(ht, hr) * hr/ri

def pl(ht, hr, ri):
return 1 + gamma(ht, hr) - gamma(ht, hr)*hr/ri + psi(ht)

def sl(w, ri, ht):
return w + mm.da["beta"]*ht*ir(ri)/mm.da["c"]

#w k l
#beta for l k-1, alf for l
def wl(w, ri, ht, hr, betta, alfa):
u = ul(hr, ht, ri)
return (sl(w, ri, ht) - u*betta)/(pl(ht, hr, ri) + alfa*u)

#w k m
#bett for m+1 k, alf for m+1, w for m+1 k
def wm(alf, bett, w):
return alf*w + bett

def xOy(args):
tt = time.time()
stepr, stept, riarr = args[0], args[1], args[2]
res = [np.zeros((riarr.__len__(), 1)), ]
for k in np.arange(1, 100, stept):
len = riarr.__len__()-1
ss = []
j = 0
for ri in riarr[0:len]:
if (ri == 0):
ss.append([s0(0, stept), ])
else:
ss.append([ssi(res[k-1][j], ri, stept), ])
j += 1
s = np.matrix(ss)
a = np.zeros((len, len))
a[0, 0] = p0(stept, stepr)
a[0, 1] = -1 * q0(stept, stepr)
a[len - 1, len - 2] = -1 * ul(stepr, stept, riarr[len - 1])
a[len - 1, len - 1] = pl(stept, stepr, riarr[len - 1])
for i in np.arange(1, len - 1, stept):
a[i, i - 1] = -1 * uui(stept, stepr, riarr[i])
a[i, i] = ppi(stepr, stept, riarr[i])
a[i, i + 1] = -1 * qqi(stept, stepr, riarr[i])
temp = [ele for ele in np.linalg.solve(a, s).flat]
temp.append(temp[len-1])
res.append(temp)

print('finish process lilya' + ' {0:.2f}'.format(time.time()-tt))
return res

```

Неявная схема с центральным аналогом.

```

import math
import numpy as np
import time

import mathmethods as mm

def ir(ri):

```

```

if(ri <= mm.da['a']):
a = mm.da['P']/(math.pi*mm.da['a']**2)
return a
return 0

def psi(ht):
return 2 * mm.da['alf'] * ht / (mm.da['c'] * mm.da['l'])

def gamma(ht, hr):
return mm.da['k'] * ht / (mm.da['c'] * hr**2)

def p0(ht, hr):
return 1 + 4*gamma(ht,hr) + psi(ht)

def q0(ht, hr):
return 4*gamma(ht,hr)+1

def s0(w, ht):
return w + mm.da['beta']*ht*ir(0)/mm.da['c']

def ppi(hr, ht, ri):
return 1 + 2*gamma(ht, hr) + psi(ht)

def uui(ht, hr, ri):
return gamma(ht, hr) - gamma(ht, hr)*hr/(2*ri)

def qqi(ht, hr, ri):
return gamma(ht,hr) + gamma(ht, hr)*hr/(2*ri)

def ssi(w, ri, ht):
return w + mm.da['beta']*ht*ir(ri)/mm.da['c']

def ul(hr, ht, ri):
return 2*gamma(ht,hr)

def pl(ht, hr, ri):
return 1 + 2*gamma(ht, hr) + psi(ht)

def sl(w, ri, ht):
return w + mm.da['beta']*ht*ir(ri)/mm.da['c']

#w k l
#beta for l k-1, alf for l
def wl(w, ri, ht, hr, beta, alfa):
u = ul(hr, ht, ri)
return (sl(w, ri, ht) - u*beta)/(pl(ht, hr, ri) + alfa*u)

#w k m

```

```

#bett for m+1 k, alf for m+1, w for m+1 k
def wm(alf, bett, w):
return alf*w + bett

def xOy(args):
tt = time.time()
stepr, stept, riarr = args[0], args[1], args[2]
res = [np.zeros((riarr.__len__(), 1)), ]
for k in range(1, 100, stept):
len = riarr.__len__()
ss = []
j = 0
for ri in riarr:
if (ri == 0):
ss.append([s0(0, stept), ])
else:
ss.append([ssi(res[k-1][j], ri, stept), ])
j += 1
s = np.matrix(ss)
a = np.zeros((len, len))
a[0, 0] = p0(stept, stepr)
a[0, 1] = -1 * q0(stept, stepr)
a[len - 1, len - 2] = -1 * ul(stepr, stept, riarr[len - 1])
a[len - 1, len - 1] = pl(stept, stepr, riarr[len - 1])
for i in np.arange(1, len - 1, 1):
a[i, i - 1] = -1 * uui(stept, stepr, riarr[i])
a[i, i] = ppi(stepr, stept, riarr[i])
a[i, i + 1] = -1 * qqi(stept, stepr, riarr[i])
res.append(np.linalg.solve(a, s))

print('finish process rita' + ' {0:.2f}'.format(time.time()-tt))
return res

```