

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе
Дисциплина: «Численные методы математической физики»

**Тема: «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»**

Вариант №8

Выполнили студенты

Анурин А.С.
Григина В.С.
Попов Д.С.

Группа 6407-010302D

Преподаватель

Дегтярев А.А.

Самара, 2019

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.
5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.
6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

ВАРИАНТ 8

Разработать программу расчета динамики поля концентрации вещества в цилиндре на временном промежутке $0 < t \leq T$. Для численных расчетов использовать:

- простейшую явную конечно-разностную схему (Попов Д.С.);
- простейшую неявную конечно-разностную схему (Анурин А.С.);
- конечно-разностную схему Кранка-Николсон (Гринина В.С.).

В цилиндре конечной длины l находится диффундирующее вещество, концентрация частиц которого в момент времени $t = 0$ описывается функцией:

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где x — числовая ось, направленная вдоль оси цилиндра.

Коэффициент диффузии вещества является постоянным и равен D . Концы цилиндра закрыты полунепроницаемыми мембранами, через которые происходит диффузия вещества. Предполагается, что поток вещества через мембраны пропорционален разности концентраций вещества во внешней среде и в цилиндре, т.е.:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - H(\tilde{u} - \tilde{u}_c) \right]_{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + H(\tilde{u} - \tilde{u}_c) \right]_{x=l} = 0,$$

где $\tilde{u}_c$ — концентрация вещества во внешней по отношению к цилиндру среде, H — мембранный коэффициент диффузии.

Боковая поверхность цилиндра является непроницаемой.

Процесс диффузии вещества сопровождается явлением размножения его частиц, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна их концентрации в этой точке. Коэффициент пропорциональности равен β .

Концентрацию вещества считать одинаковой во всех точках поперечного сечения цилиндра в любой момент времени.

При проведении расчетов использовать значения параметров и выражение функции, указанные преподавателем:

$$l = 20\text{м},$$

$$D = 0.6\text{м}^2/\text{с},$$

$$\tilde{u}_c = 0\text{кг}/\text{м}^3,$$

$$H = 4\text{м}^2/\text{с},$$

$$T = 100\text{с},$$

$$\beta = 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) = 0.4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \text{кг}/\text{м}^3.$$

РЕФЕРАТ

Отчет по курсовой работе: 54 с., 12 рисунков, 5 таблиц, 5 источников, 1 приложение.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, МЕТОД ПРОГОНКИ, МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОГРЕШНОСТЬ.

Целью курсовой работы является построение и исследование разностной схемы для решения краевой задачи, описывающей процесс диффузии вещества в трубке кругового сечения. Динамическое поле концентрации вещества рассматривается на временном промежутке $t \in (0, T]$.

Для решения задачи использованы простейшая явная разностная схема, простейшая неявная разностная схема и схема Кранка-Николсон. Проведены теоретические исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем. Сделан вывод о сходимости сеточных решений к точным решениям исходной задачи.

Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки и позволяющая рассчитывать решение сеточной задачи.

Приведены графические результаты численного решения задачи диффузии.

Программа написана на языке Python 3.7 в среде разработки PyCharm 2019.1, операционная система macOS Mojave 10.14.1.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	8
1 Математическая постановка задачи	9
2 Простейшая явная разностная схема (Попов Д.С.)	10
2.1 Построение простейшей явной разностной схемы	10
2.2 Аппроксимация простейшей явной разностной схемы	11
2.3 Устойчивость простейшей явной разностной схемы	14
2.4 Алгоритм решения	17
2.5 Исследование сходимости простейшей явной разностной схемы	18
2.6 Графическое представление решения простейшей явной разностной схемы	19
2.7 Экспериментальное исследование погрешности	21
3 Простейшая неявная разностная схема (Анурин А.С.)	22
3.1 Построение простейшей неявной разностной схемы	22
3.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы	22
3.3 Устойчивость простейшей неявной разностной схемы	25
3.4 Метод прогонки для простейшей неявной разностной схемы	28
3.5 Исследование сходимости простейшей неявной разностной схемы	30
3.6 Графическое представление решения простейшей неявной разностной схемы	31
3.7 Экспериментальное исследование погрешности	32
4 Разностная схема Кранка-Николсон (Гринина В.С.)	34
4.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсон	34
4.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсон	35
4.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсон	37

4.4 Метод прогонки для разностной схемы Кранка-Николсон	39
4.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсон	42
4.6 Графическое представление решения простейшей неявной разностной схемы.....	42
4.7 Экспериментальное исследование погрешности.....	43
5 Описание программы	45
Заключение.....	48
Список использованных источников.....	50
Приложение А Код интерфейса оконного приложения	51

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающих алгоритмов и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающих алгоритмов.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи диффузии в цилиндре. Вычислительные алгоритмы основаны на использовании следующих разностных схем: простейшей явной, простейшей неявной повышенного порядка аппроксимации и Кранка-Николсон повышенного порядка аппроксимации. Проведены теоретические исследования аппроксимации и устойчивости выбранных разностных схем. Сделаны выводы о сходимости сеточных решений к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритмы прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи диффузии.

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим цилиндр конечной длины, концентрация вещества которого в точке пространства (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $\tilde{u}(x, y, z, t)$.

Математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(x, t) = D\tilde{u}_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l; \\ \tilde{u}_x(0, t) = H(\tilde{u}(0, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T; \\ \tilde{u}_x(l, t) = -H(\tilde{u}(l, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (1.1)$$

Сделаем замену $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$ [1] так, чтобы граничные условия задачи (1.1) стали однородными.

$$\begin{cases} u(x, 0) + w(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_x(0, t) + w_x(0, t) = H(u(0, t) + w(0, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T; \\ u_x(l, t) + w_x(l, t) = -H(u(l, t) + w(l, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (1.2)$$

Очевидно, мы можем взять $w(x, t) = \tilde{u}_c$.

Тогда после замены итоговая математическая модель будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \tilde{\psi}(x) - \tilde{u}_c = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_x(0, t) - Hu(0, t) = 0, & 0 < t \leq T; \\ u_x(l, t) + Hu(l, t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (1.3)$$

2 Простейшая явная разностная схема (Попов Д.С.)

2.1 Построение простейшей явной разностной схемы

Для построения простейшей явной схемы определим равномерную сетку как множество узлов:

$$\begin{aligned}x_i &= ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l}{I}; \\t_k &= kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K};\end{aligned}\tag{2.1}$$

где I – число интервалов разбиения промежутка $0 \leq x \leq l$, а K – число интервалов разбиения отрезка времени $0 \leq t \leq T$.

Для построения схемы задачи (1.3) заменим все функции непрерывных аргументов x и t их сеточными аналогами, а производные — нижеприведенными разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2},\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t},\tag{2.3}$$

и для граничных условий:

$$\frac{\partial u(x_0, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_1, t_k) - u(x_0, t_k)}{h_x},\tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u(x_I, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_I, t_k) - u(x_{I-1}, t_k)}{h_x}.\tag{2.5}$$

В результате получим следующую явную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} - Hu_0^k = 0, \quad k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} + Hu_I^k = 0, \quad k = \overline{1, K}; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

где u_i^k — решение этой системы в узле (x_i, t_k) , $\psi_i = \psi(x_i)$, h_x — шаг разбиения по длине цилиндра, h_t — шаг разбиения по интервалу времени.

2.2 Аппроксимация простейшей явной разностной схемы

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} = 0 \quad (2.7)$$

при произвольном выборе последовательности равномерно сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы будет иметь следующую структуру:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[u]_h - f_h^1 \\ L_h^2[u]_h - f_h^2 \\ L_h^3[u]_h - f_h^3 \\ L_h^4[u]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (2.8) по отдельности. Начнем с первой:

$$\begin{aligned} \{\delta f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\ &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t} - D \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Проведем разложение по формуле Тейлора значений $u(x_i, t_{k+1})$, $u(x_i, t_{k-1})$, $u(x_{i+1}, t_k)$, $u(x_{i-1}, t_k)$ в точке (x_i, t_k) и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u + u'_t h_t + \frac{u''_{tt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) - u \right] - \right. \\
&\quad - \frac{D}{h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) - 2u \right] - \\
&\quad \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u'_t h_t + \frac{u''_{tt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \frac{D}{h_x^2} \left[u''_{xx} h_x^2 + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_t + 0.5 u''_{tt} h_t - D u''_{xx} + O(h_x^2, h_t^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Воспользуемся первым уравнением краевой задачи (1.3), тогда (2.10) упростится до

$$\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u''_{tt} h_t}{2} + O(h_x^2, h_t^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = O(h_x^2, h_t). \tag{2.11}$$

Для второй компоненты невязки в соответствии с начальным условием краевой задачи (1.3) будем иметь:

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=0} = u(x_i, 0) - \psi(x_i) = 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим третью компоненту невязки и проведем разложение в ряд Тейлора значения $u(x_1, t_k)$ в точке (x_0, t_k) :

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^3[u]_h - f_h^3 \right\}_{x=0}^{t=t_k} = \frac{u(x_1, t_k) - u(x_0, t_k)}{h_x} - Hu(x_0, t_k) = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_x} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + O(h_x^3) - u \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_x + \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Используя первое граничное условие краевой задачи (1.3), получим:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ u'_x + \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Аналогично для последней компоненты невязки получим:

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x). \tag{2.15}$$

В итоге получили:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O(h_x^2, h_t) \\ 0 \\ O(h_x) \\ O(h_x) \end{Bmatrix}. \tag{2.16}$$

Определим норму в пространстве F_h следующим образом:

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=1, I-1 \\ k=0, K-1}} \left| \left\{ f_h^1 \right\}_{x_i}^{t_k} \right|, \max_{i=0, I} \left| \left\{ f_h^2 \right\}_{x_i}^{t_0} \right|, \max_{k=1, K} \left| \left\{ f_h^3 \right\}_{x_0}^{t_k} \right|, \max_{k=1, K} \left| \left\{ f_h^4 \right\}_{x_l}^{t_k} \right| \right\}.$$

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой выше будет иметь вид:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \{ O(h_x^2, h_t), 0, O(h_x), O(h_x) \} = O(h_x, h_t). \tag{2.17}$$

Из последней формулы сразу вытекает предельное равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = 0 \quad (2.18)$$

Итак, в результате исследования получено, что простейшая явная разностная схема (2.6) аппроксимирует краевую задачу (1.3) на ее решении u , причем погрешность аппроксимации имеет первый порядок как по h_x , так и h_t .

2.3 Устойчивость простейшей явной разностной схемы

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где C — константа.

Зададим возмущение разностной схеме:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} - Hu_0^k = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} + Hu_I^k = 0, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Решение рассчитывается по явной формуле во всех узлах, следовательно, решение существует и единственно.

Проверим выполнение второго условия устойчивости. Для этого сначала определим нормы:

$$\begin{aligned}\|u_h\|_{U_h} &= \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k|, \\ \|f_h\|_{F_h} &= \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{0, K-1}}} |\varphi_i^k| + \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i|.\end{aligned}$$

Выразим u_i^{k+1} из возмущенной разностной схемы:

$$\begin{aligned}u_i^{k+1} &= u_{i+1}^k D \frac{h_t}{h_x^2} + u_i^k \left(1 - \frac{2Dh_t}{h_x^2}\right) + u_{i-1}^k D \frac{h_t}{h_x^2} + h_t \varphi_i^k, \\ i &= \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K-1}.\end{aligned}$$

Положив $\gamma = D \frac{h_t}{h_x^2}$, распишем неравенство треугольника:

$$|u_i^{k+1}| \leq |u_{i+1}^k| \gamma + |u_i^k| |1 - 2\gamma| + |u_{i-1}^k| \gamma + h_t |\varphi_i^k|.$$

Пусть $1 - 2\gamma \geq 0$, тогда:

$$\begin{aligned}|u_i^{k+1}| &\leq \gamma (|u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + (1 - 2\gamma) |u_i^k| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq \\ &\leq 2\gamma \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k| + (1 - 2\gamma) \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq \\ &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k| + h_t \|f_h\|_{F_h},\end{aligned}$$

$$i = \overline{1, I-1}, k = \overline{0, K-1}.$$

Заменим полученное неравенство на аналогичное:

$$|u_i^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h},$$

$$i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}.$$

Очевидно, что, раз правая часть не зависит от i , то неравенство выполняется для любых значений i , следовательно, следующее верно:

$$\max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k| \leq \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^{k-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h},$$

$$i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K}.$$

Для различных k :

$$k = 1: \max_{j=0, \overline{I}} |u_j^1| \leq \max_{j=0, \overline{I}} |u_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \Rightarrow |u_i^1| \leq \|f_h\|_{F_h} (1 + h_t);$$

$$k = 2: \max_{j=0, \overline{I}} |u_j^2| \leq \max_{j=0, \overline{I}} |u_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \Rightarrow |u_i^2| \leq \|f_h\|_{F_h} (1 + 2h_t);$$

...

$$k = K: \max_{j=0, \overline{I}} |u_j^K| \leq \|f_h\|_{F_h} (1 + Kh_t).$$

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k| \leq \|f_h\|_{F_h} (1 + Kh_t) = \|f_h\|_{F_h} (1 + T), \text{ следовательно, схема}$$

устойчива при $1 - 2\gamma \geq 0$.

Докажем, что схема неустойчива в иных случаях:

$$\forall c > 0, h_0 > 0, \exists h \leq h_0, \exists f_h \in F_h \rightarrow \|u_h\|_{U_h} > c \|f_h\|_{F_h}.$$

$$\text{Выберем } f_h: \varphi_i^k = 0; \psi_i = (-1)^i \xi, \xi > 0, \alpha^k = \xi, \beta^k = (-1)^i \xi.$$

Для различных k :

$$k = 1:$$

$$\begin{aligned} u_i^1 &= u_{i+1}^0 \gamma + u_i^0 (1 - 2\gamma) + u_{i-1}^0 \gamma + h_t \varphi_i^0 = \\ &= \psi_{i+1} \gamma + \psi_i (1 - 2\gamma) + \psi_{i-1} \gamma + h_t \varphi_i^0 = \\ &= (-1)^{i+1} \varepsilon \gamma + (-1)^i \varepsilon (1 - 2\gamma) + (-1)^{i-1} \varepsilon \gamma = (-1)^i \varepsilon (1 - 4\gamma) = \\ &= (1 - 4\gamma) \psi_i; \end{aligned}$$

$$k = 2: u_i^2 = (1 - 4\gamma)^2 \psi_i;$$

...

$$k = K: u_i^K = (1 - 4\gamma)^K \psi_i.$$

$$\text{Следовательно, } \forall k = \overline{1, K}: u_i^k = (1 - 4\gamma)^k \psi_i.$$

Так как:

$$\begin{aligned}
1 - 2\gamma &< 0, \\
2 - 4\gamma &< 0, \\
1 - 4\gamma &< -1 \Rightarrow |1 - 4\gamma| > 1,
\end{aligned}$$

ВОЗЬМЕМ

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{1, K}}} |u_i^k| = \max_{k=\overline{1, K}} |1 - 4\gamma|^k \varepsilon = |1 - 4\gamma|^{\overline{K}} \varepsilon = |1 - 4\gamma|^{\frac{T}{h_i}} \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \|f_h\|_{F_h}.$$

При малых значениях h_i получаем сколь угодно большие значения $\|u_h\|_{U_h}$, следовательно, схема неустойчива при $1 - 2\gamma < 0$.

Таким образом, схема условно устойчива.

2.4 Алгоритм решения

Стоит задача вычисления u_i^k при $i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K}$. Из математической модели задачи получим различные формулы для расчета u_i^k :

$$1. \quad u_i^k = Dh_i \frac{u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}}{h_x^2} + u_i^{k-1}, i = \overline{1, I-1}, k = \overline{1, K};$$

$$2. \quad u_i^k = \psi_i, i = \overline{0, I}, k = 0;$$

$$3. \quad u_i^k = \frac{u_1^k}{Hh_x + 1}, k = \overline{1, K}, i = 0;$$

$$4. \quad u_i^k = \frac{u_1^k}{1 - Hh_x}, k = \overline{1, K}, i = 0;$$

Для наглядности представим все u_i^k в виде таблицы, где индексы k и i будут выступать номерами строк и столбцов соответственно. Идя по строкам сверху вниз, будем вычислять u_i^k по функции с номером, соответствующем значению ячейки таблицы.

Таблица 1 — Номера функций для вычисления u_i^k

$\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix}$	0	1	2	...	$l-2$	$l-1$	l
0	2	2	2	...	2	2	2
1	3	1	1	...	1	1	4
2	3	1	1	...	1	1	4
...	...	...	...	...	...	...	...
K	3	1	1	...	1	1	4

Распишем алгоритм поэтапно:

- 1) Заполняем первую таблицы строку используя функцию 2.
- 2) Начинаем итерацию по строкам.
- 3) Заполняем со второй по предпоследнюю позиции строки, используя функцию 1.
- 4) Заполняем первую позицию строки, используя функцию 3.
- 5) Заполняем последнюю позицию строки, используя функцию 4.
- 6) Заканчиваем итерацию по строкам.

2.5 Исследование сходимости простейшей явной разностной схемы

Выше было доказано, что:

- простейшая явная схема аппроксимирует решение краевой задачи с порядками аппроксимации $O(h_x, h_t)$;
- простейшая явная схема является условно устойчивой с условием $1 - 2\gamma \geq 0$.

Отсюда следует, что явная схема сходится к решению краевой задачи при выполнении условия $1 - 2\gamma \geq 0$, причем скорость сходимости является линейной как по h_x , так и по h_t .

2.6 Графическое представление решения простейшей явной разностной схемы

В процессе исследования была разработана программа, реализующая решение простейшей явной разностной схемы, которая будет описана в последующем разделе. Приведем несколько примеров решений, рассчитанных с помощью программы.

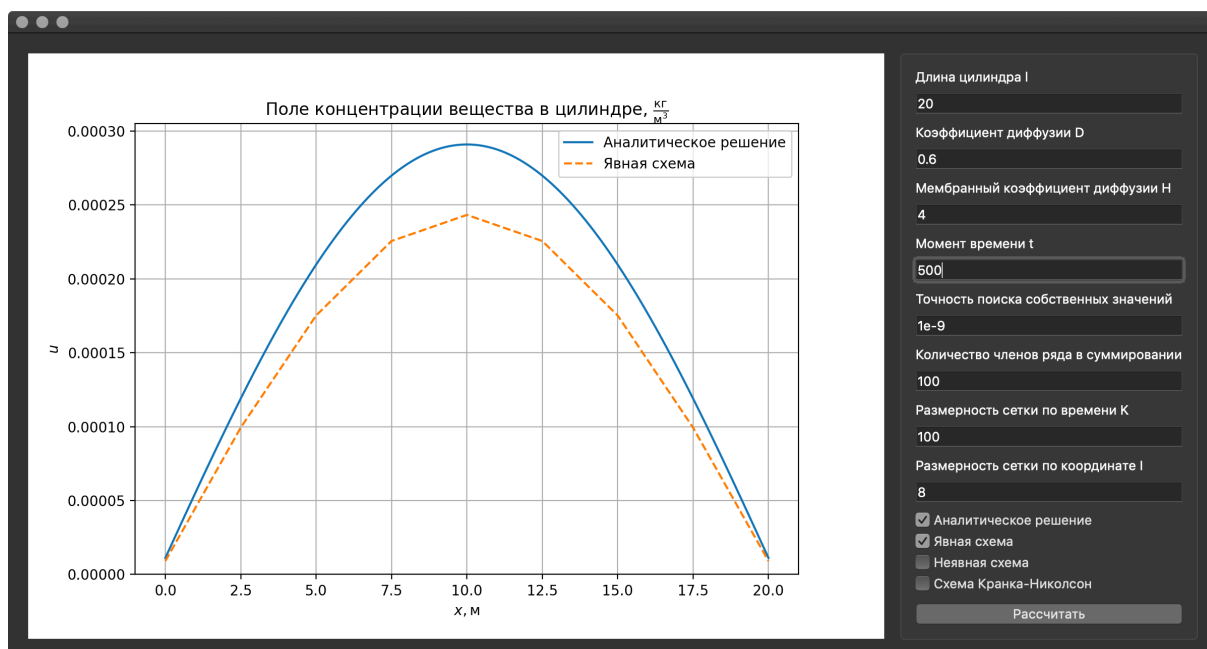


Рисунок 1 — Явная схема с параметрами $t = 500, l = 8, K = 100$

Рисунок 1 иллюстрирует расхождение результата явной схемы с аналитическим решением для больших значений момента времени, вызванное накоплением ошибки.

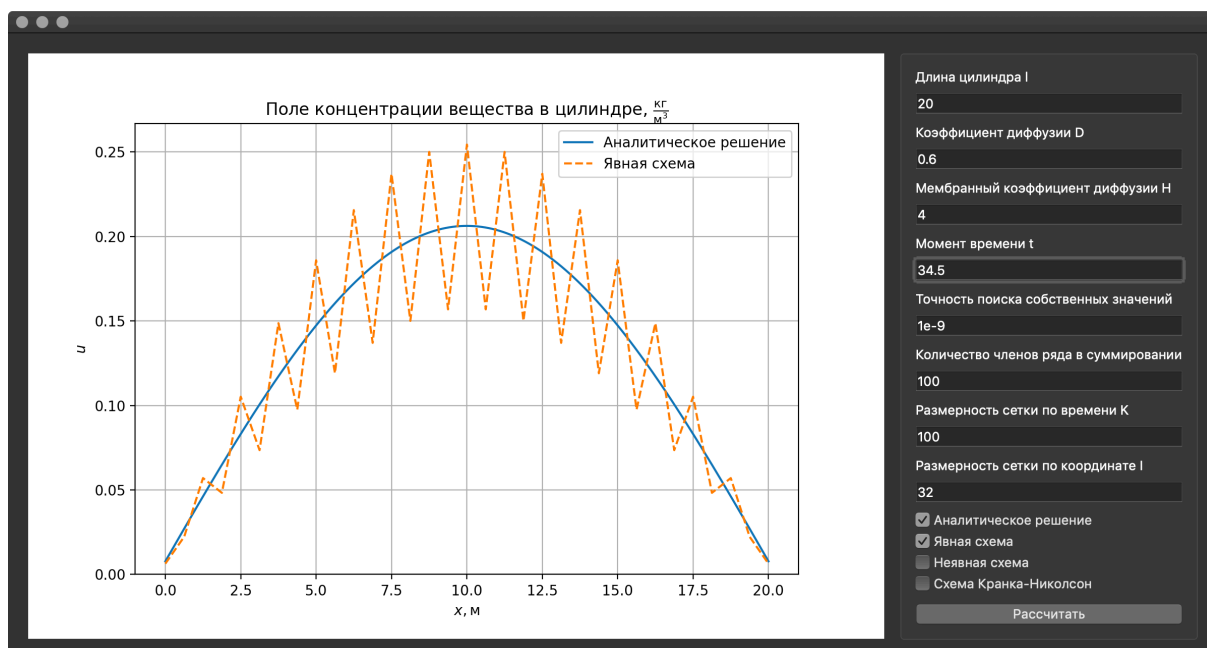


Рисунок 2 — Явная схема с параметрами $t = 34,5; I = 32; K = 100$

Рисунок 2 показывает неустойчивую работу явной схемы при нарушении условия устойчивости, то есть при относительно большом шаге по координате относительно шага по времени.

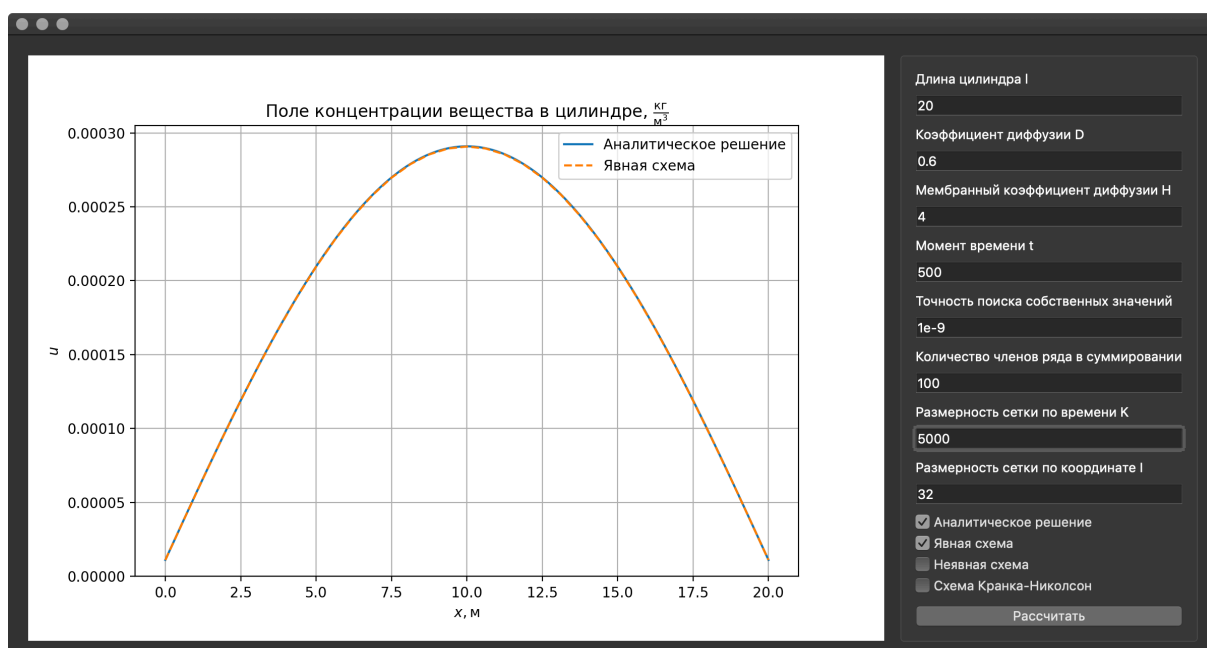


Рисунок 3 — Явная схема с параметрами $t = 500, I = 32, K = 5000$

Рисунок 3 иллюстрирует хорошую сходимость явной схемы при достаточной мелкости сетки.

2.7 Экспериментальное исследование погрешности

Теоретический результат показал, что явная схема аппроксимирует точное решение с порядками $O(h_x, h_t)$. Проведем эмпирическую оценку порядков аппроксимации численного решения, сравнив значения сеточной функции с аналитическим решением, рассчитанным с абсолютной ошибкой, не превышающей 10^{-6} .

Для этого будем сравнивать для различных сеток норму ошибки, определенную следующим образом:

$$\varepsilon(h_x, h_t) = \max_{\substack{i=0, \dots, I \\ k=0, \dots, K}} |u_i^k - u(x_i, t_k)|.$$

Для проверки гипотезы о том, что явная схема аппроксимирует точное решение с первым порядком относительно h_x и первым порядком относительно h_t , сравним значения нормы ошибки для сеток размерностей (I, K) и $(2I, 2K)$. Если отношение ошибок приблизительно равно двум, то гипотеза выполняется.

Таблица 2 — Ошибки явной схемы для разных сеток

I	K	$2I$	$2K$	$\varepsilon(h_x, h_t)$	$\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)$	$\frac{\varepsilon(h_x, h_t)}{\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)}$
4	256	8	512	0,01261743	0,00437639	2,8830
8	512	16	1024	0,00437639	0,00206266	2,1217
16	1024	32	2048	0,00206266	0,00088437	2,3323
32	2048	64	4096	0,00088437	0,00034600	2,5559

Таблица 2 показывает, что теоретический результат совпадает с результатом численного эксперимента.

3 Простейшая неявная разностная схема (Анурин А.С.)

3.1 Построение простейшей неявной разностной схемы

Для построения простейшей неявной разностной схемы задачи (1.3) воспользуемся ранее введенной сеткой (2.1). Заменяем производные следующими разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2}, \\ \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} &\approx \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1}))}{h_t},\end{aligned}\tag{3.1}$$

и разностными отношениями (2.4) и (2.5) для граничных условий.

В результате получим простейшую неявную разностную схему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} &= D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 &= \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} - Hu_0^k &= 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} + Hu_I^k &= 0, & k = \overline{1, K}. \end{aligned} \right.\tag{3.2}$$

3.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структуре невязки для простейшей явной схемы (2.8).

Рассматривая отдельно каждую компоненту невязки и действуя по аналогии с исследованием аппроксимации простейшей явной схемы, получим:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})}{h_t} - D \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2} = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u - u + u'_t h_t - \frac{u''_t h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) - 2u \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_t - \frac{u''_t h_t}{2} + O(h_t^2) - D \left[u''_{xx} + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ -\frac{u''_t h_t}{2} + O(h_t^2) + O(h_x^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = O(h_x^2, h_t);
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=0} = u(x_i, 0) - \psi(x_i) = 0; \tag{3.4}$$

$$\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x); \tag{3.5}$$

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x). \tag{3.6}$$

Соответственно степень аппроксимации разностной схемы (3.2) будет выражаться как:

$$\left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = O(h_x, h_t).$$

Заметим, что оба граничных условия имеют лишь первый порядок аппроксимации по шагу h_x , в то время как дифференциальное уравнение задачи аппроксимировано со вторым порядком.

Повысим порядок аппроксимации для граничных условий. Распишем производные в граничных условиях согласно не левым и правым формулам,

а центральным. Тогда неявная разностная схема повышенного порядка будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Отметим, что значение в дополнительных узлах u_{-1}^k и u_{I+1}^k не имеют физического смысла, поэтому запишем схему в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_1^k - \frac{1}{h_t} u_0^{k-1} = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k - \frac{1}{h_t} u_I^{k-1} = 0, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Для граничных условий схемы повышенного порядка невязки будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[u + u'h_x + \frac{u''h_x^2}{2} + \frac{u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2h_x} \left[-u + u'h_x - \frac{u''h_x^2}{2} + \frac{u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[2u'h_x + \frac{2u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_x + \frac{u'''h_x^2}{6} + O(h_x^3) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u'''h_x^2}{6} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2);
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x^2). \tag{3.9}$$

Полученные невязки являются квадратичными относительно параметра дискретизации h_x . Следовательно, степень аппроксимации разностной схемы (3.7) будет выше, чем схемы (3.2), а именно:

$$\left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = O(h_x^2, h_t).$$

3.3 Устойчивость простейшей неявной разностной схемы

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

3. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;

4. $\left\| u_h \right\|_{U_h} \leq C \left\| f_h \right\|_{F_h}$, где C — константа.

Зададим возмущение разностной схеме (3.7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_1^k - \frac{1}{h_t} u_0^{k-1} = \alpha^k, \quad k = \overline{1, K}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k - \frac{1}{h_t} u_I^{k-1} = \beta^k, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, явно полученного с помощью метода прогонки.

Проверим выполнение второго условия устойчивости. Для этого сначала определим нормы:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=\overline{0, K}}} |u_i^k|; \quad (3.10)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{0, K}}} |\varphi_i^k| + \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i| + \max_{k=\overline{1, K}} |\alpha^k| + \max_{k=\overline{1, K}} |\beta^k|. \quad (3.11)$$

Рассмотрим первое дифференциальное уравнение разностной схемы с возмущением. Домножим его на h_t и введем $\gamma = \frac{Dh_t}{h_x^2} > 0$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$u_i^k (1 + 2\gamma) = u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^k + \gamma u_{i-1}^k + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|u_i^k| (1 + 2\gamma) \leq |u_i^{k-1}| + \gamma (|u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + |\varphi_i^k| h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (3.12)$$

Определим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\varphi_i^k| &\leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ |u_i^k| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k|, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Воспользуемся данными оценками в неравенстве (3.12):

$$|u_i^k|(1+2\gamma) \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i , то оно справедливо для любых левых частей по i , в том числе и максимальной. Следовательно, получаем следующее неравенство:

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^k|(1+2\gamma) \leq \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим первое граничное условие. Так же домножим его на h_t :

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_0^k = 2\gamma u_1^k + u_0^{k-1} + \alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для того, чтобы оценить величину $|u_k^i|$:

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma |u_1^k| + |u_0^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Из определения (3.11) следует, что $|\alpha^k| \leq \|f_h\|$:

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma |u_1^k| + |u_0^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Воспользуемся оценками (3.13):

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Заменим $(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)$ на $(2\gamma + 1)$, так как $(2H\gamma h_x \geq 0)$:

$$(2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.15)$$

Аналогичным образом из второго граничного условия

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_I^k = 2\gamma u_{I-1}^k + u_I^{k-1} + \beta^k h_t$$

можем получить следующее неравенство:

$$(2\gamma + 1)|u_I^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.16)$$

Объединив неравенства (3.14), (3.15) и (3.16), получим следующую оценку:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| (1 + 2\gamma) \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.17)$$

Рассмотрим финальное неравенство (3.17) при различных значениях $k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned} k = 1: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^1| \leq \max_{j=0,I} |u_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\ k = 2: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^2| \leq \max_{j=0,I} |u_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\ & \dots \\ k = K: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^K| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = \\ & = (1 + T) \|f_h\|_{F_h} = C \|f_h\|_{F_h}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где $C = 1 + T$.

Таким образом, схема (3.7) является безусловно устойчивой.

3.4 Метод прогонки для простейшей неявной разностной схемы

Приведем неявную разностную схему повышенного порядка аппроксимации (3.7) к виду, удобному для вычислений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\gamma u_{i-1}^k + (2\gamma + 1)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = u_i^{k-1}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ (2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_0^k - 2\gamma u_1^k = u_0^{k-1}, & k = \overline{1, K}; \\ -2\gamma u_{I-1}^k + (2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_I^k = u_I^{k-1}, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Заметим, что нахождение значений сеточной функции очередного временного слоя эквивалентно решению СЛАУ с матрицей следующего трехдиагонального вида:

$$A \begin{pmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_I^k \end{pmatrix} = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 & -2\gamma & & & 0 \\ & -\gamma & 2\gamma + 1 & -\gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma & 2\gamma + 1 & -\gamma \\ 0 & & & -2\gamma & 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} u_0^{k-1} \\ \vdots \\ u_I^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания, так как:

$$\begin{aligned} |2H\gamma h_x + 2\gamma + 1| &> |2\gamma|, \\ |2\gamma + 1| &> |-\gamma| + |-\gamma|. \end{aligned}$$

Таким образом, получившееся СЛАУ можно решать методом прогонки. В терминах метода прогонки задача формулируется как:

$$A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i,$$

$$\begin{aligned} i = 0: \quad & A_i = 0, \quad B_i = 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1, \quad C_i = -2\gamma, \quad D_i = u_i^{k-1}, \\ i = \overline{1, I-1}: \quad & A_i = -\gamma, \quad B_i = 2\gamma + 1, \quad C_i = -\gamma, \quad D_i = u_i^{k-1}, \\ i = I: \quad & A_i = -2\gamma, \quad B_i = 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1, \quad C_i = 0, \quad D_i = u_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Совершая прямой проход, потребуем, чтобы $A'_i = 0$ и $B'_i = 1$:

$$u_i^k + C'_i u_{i+1}^k = D'_i,$$

$$i = 0: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i}, \quad D'_i = \frac{D_i}{B_i},$$

$$i = \overline{1, I}: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}}, \quad D'_i = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}.$$

Это позволяет нам выразить искомые неизвестные в процессе обратного прохода:

$$i = \overline{0, I-1}: \quad u_i^k = D'_i - C'_i u_{i+1}^k,$$

$$i = I: \quad u_i^k = D'_i.$$

Таким образом, весь метод прогонки можно выразить как:

$$i = 0: \quad u_i^k = \frac{D_i}{B_i} - \frac{C_i}{B_i} u_{i+1}^k,$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad u_i^k = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}} - \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}} u_{i+1}^k,$$

$$i = I: \quad u_i^k = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}.$$

Или, если вернуться к исходным обозначениям:

$$i = 0: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + 2\gamma u_{i+1}^k}{2H\gamma h_x + 2\gamma + 1},$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + \gamma D'_{i-1} + \gamma u_{i+1}^k}{2\gamma + 1 + \gamma C'_{i-1}},$$

$$i = I: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + 2\gamma D'_{i-1}}{2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 + 2\gamma C'_{i-1}}.$$

3.5 Исследование сходимости простейшей неявной разностной схемы

Выше было доказано, что:

- простейшая неявная разностная схема (3.7) аппроксимирует решение краевой задачи (1.3) с порядками аппроксимации $O(h_x^2, h_t)$;
- схема (3.7) является абсолютно устойчивой.

Отсюда следует, что схема (3.7) сходится к решению краевой задачи (1.3), причем скорость сходимости является квадратичной по h_x и линейной по h_t .

3.6 Графическое представление решения простейшей неявной разностной схемы

Аналогично разделу 2.6 приведем несколько примеров решений, рассчитанных с помощью программы.

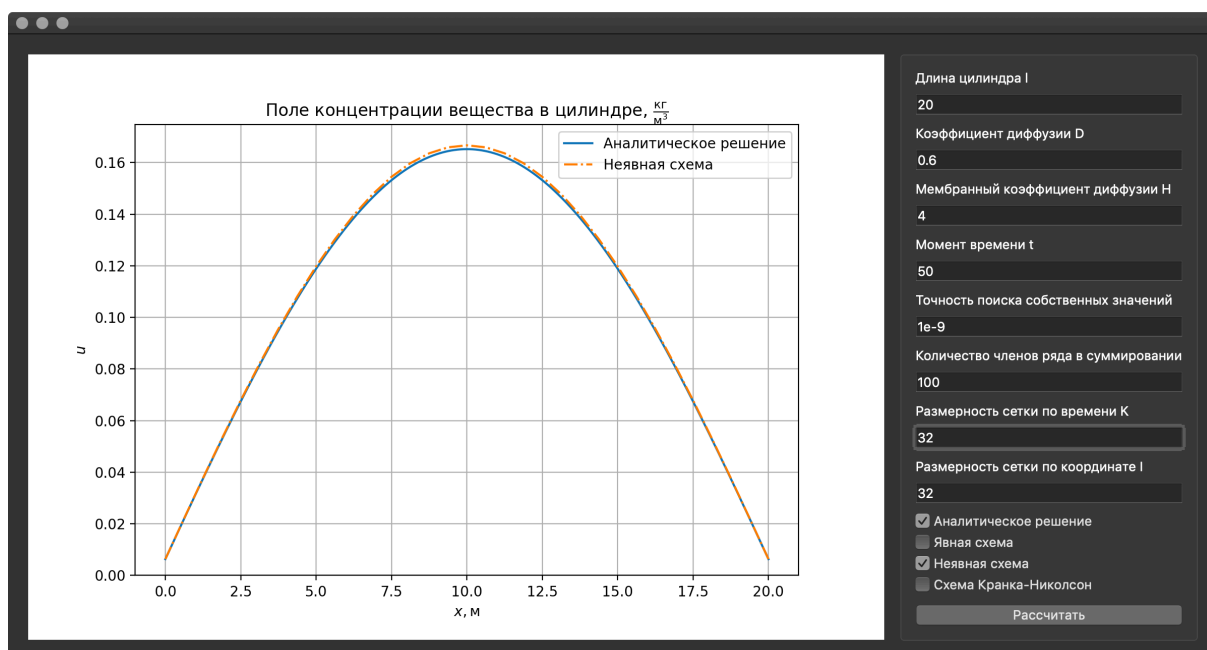


Рисунок 4 — Неявная схема с параметрами $t = 50, l = 32, K = 32$

Рисунок 4 показывает, что даже на небольших сетках неявная схема хорошо аппроксимирует точное решение. Можно заметить, что на этой сетке явная схема была бы неустойчива, в отличие от неявной.

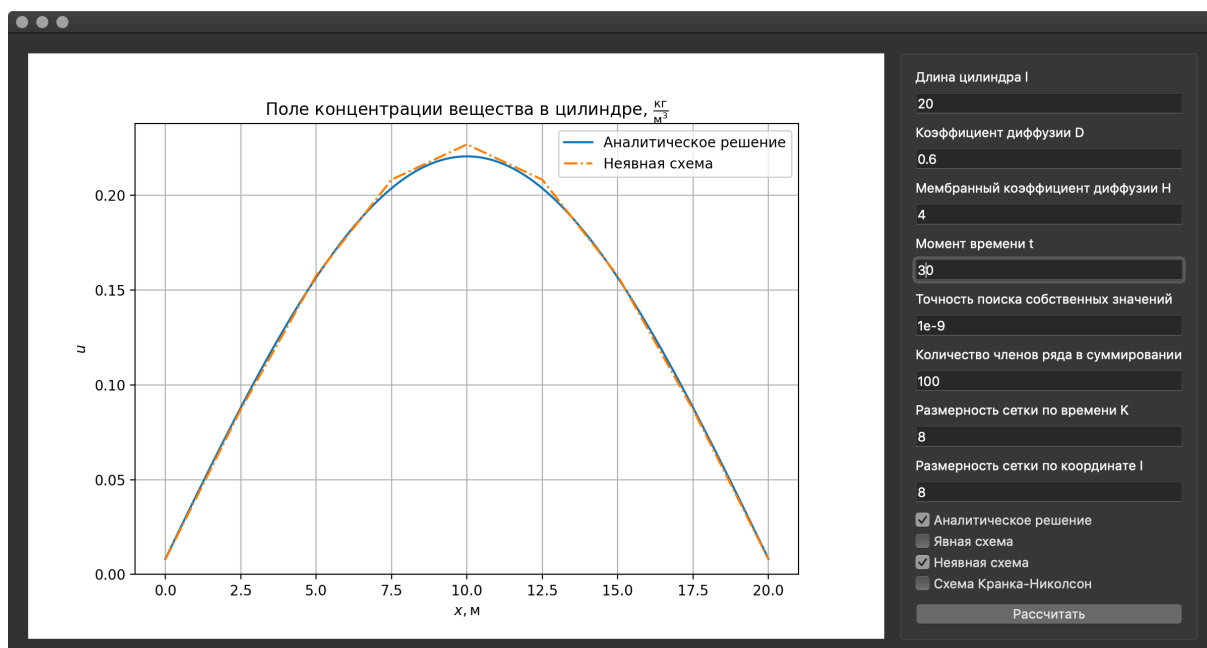


Рисунок 5 — Неявная схема с параметрами $t = 30, l = 8, K = 8$

Рисунок 5 иллюстрирует, что даже для очень маленьких сеток неявная схема хорошо аппроксимирует точное решение задачи.

3.7 Экспериментальное исследование погрешности

Теоретический результат показал, что неявная схема аппроксимирует точное решение с порядками $O(h_x^2, h_t)$. Проведем эмпирическую оценку порядков аппроксимации численного решения аналогично разделу 2.7.

Для проверки гипотезы о том, что неявная схема аппроксимирует точное решение со вторым порядком относительно h_x и первым порядком относительно h_t , сравним значения нормы ошибки для сеток размерностей (I, K) и $(2I, 4K)$. Если отношение ошибок приблизительно равно четырём, то гипотеза выполняется.

Таблица 3 — Ошибки неявной схемы для разных сеток

I	K	$2I$	$4K$	$\varepsilon(h_x, h_t)$	$\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{4}\right)$	$\frac{\varepsilon(h_x, h_t)}{\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{4}\right)}$
4	4	8	16	0,03530973	0,01170358	3,0170
8	16	16	64	0,01170358	0,00335821	3,4850
16	64	32	256	0,00335821	0,00089359	3,7581
32	256	64	1024	0,00089359	0,00022826	3,9146
64	1024	128	4096	0,00022826	0,00005745	3,9729

Таблица 3 показывает, что теоретический результат совпадает с результатом численного эксперимента.

4 Разностная схема Кранка-Николсон (Гринина В.С.)

4.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсон

Для построения схемы Кранка-Николсон заменим область непрерывного изменения аргументов функции $u(x, t)$ равномерной сеткой (2.1).

Взяв шеститочечный шаблон, рассмотрим наряду с основными узлами сетки вспомогательный узел $\left(x_i, t_k + \frac{h_t}{2}\right)$. Используя этот узел, запишем дифференциальные уравнения простейших явной и неявной схем:

$$\frac{u_i^{k+\frac{1}{2}} - u_i^k}{h_t / 2} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k+\frac{1}{2}}}{h_t / 2} = D \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2}. \quad (4.2)$$

Умножим оба уравнения на $\frac{1}{2}$ и сложим их, также допишем начальное и граничные условия повышенного порядка аппроксимации. Получим разностную схему Кранка-Николсон:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{1}{2} D \frac{(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + (u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1})}{h_x^2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, \quad k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

4.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсон

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структурам невязок для предыдущих схем.

Аналогично неявной схеме с повышенной точностью аппроксимации, вторая, третья и четвертая невязки будут:

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = 0; \quad \left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2); \quad \left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x^2).$$

Рассмотрим первую невязку:

$$\begin{aligned} \left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\ &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t} - \frac{D}{2} \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2} - \\ &- \frac{D}{2} \frac{u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h_x^2} = \\ &= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u + u'_t h_t + \frac{u''_t h_t^2}{2} + \frac{u'''_t h_t^3}{6} + O(h_t^4) \right] - \frac{D}{2h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - 2u + u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\ &- \left\{ \frac{D}{2h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right. \right. \\ &- \left. \left. 2u + u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}} = \\ &= \left\{ \left[u'_t + \frac{u''_t h_t}{2} + \frac{u'''_t h_t^2}{6} + O(h_t^3) \right] - D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\ &- \left\{ D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что выражение можно упростить, воспользовавшись первым уравнением краевой задачи (1.3): $u'_t = Du''_{xx}$. Также разложим выражение в узле (x_i, t_{k+1}) в ряд относительно узла (x_i, t_k) :

$$\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u'_t}{2} + \frac{u''_{tt} h_t}{2} + \frac{u'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} -$$

$$- \left\{ \frac{D}{2} \left[u''_{xx} + u'''_{xxt} h_t + \frac{u''''_{xxtt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}.$$

Заметим, что первое уравнение краевой задачи (1.3) продолжит выполняться, если взять производную по t левой и правой частей:

$$u'_t = Du''_{xx} \Rightarrow u''_{tt} = Du'''_{xxt}.$$

Воспользовавшись обеими уравнениями, выражение можно упростить до:

$$\left\{ \frac{u'_t}{2} + \frac{u''_{tt} h_t}{2} + \frac{u'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} -$$

$$- \left\{ \frac{D}{2} \left[u''_{xx} + u'''_{xxt} h_t + \frac{u''''_{xxtt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{ \frac{u'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) - \frac{D}{2} \left[\frac{u''''_{xxtt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= O(h_x^2, h_t^2).$$

Следовательно, порядок аппроксимации разностной схемы Кранка-Николсон квадратичный как относительно шага h_x , так и h_t .

4.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсон

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где C — константа.

Зададим возмущение разностной схеме (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{1}{2} D \frac{(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}) + (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)}{h_x^2} + \varphi_i^k, \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, I-1}, \\ k = \overline{1, K}; \end{array} \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - \frac{D}{h_x^2} u_1^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_1^{k-1} + \alpha^k, \quad k = \overline{1, K}; \\ \left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^{k-1} + \beta^k, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, полученного с помощью метода прогонки.

Будем использовать уже введенные нормы (3.10) и (3.11). Рассмотрим первое уравнение возмущенной разностной схемы. Домножим его на h_t и

введем $\gamma = \frac{Dh_t}{h_x^2} > 0$:

$$u_i^k (1 + \gamma) = \frac{\gamma}{2} (u_{i+1}^{k-1} + u_{i-1}^{k-1} + u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + u_i^{k-1} (1 - \gamma) + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|u_i^k|(1+\gamma) \leq \frac{\gamma}{2}(|u_{i+1}^{k-1}| + |u_{i-1}^{k-1}| + |u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + |u_i^{k-1}||1-\gamma| + |\varphi_i^k| h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

И воспользуемся оценками (3.13):

$$|u_i^k|(1+\gamma) \leq \gamma \left(\max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \max_{j=0, I} |u_j^k| \right) + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}||1-\gamma| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i , то данное неравенство справедливо для любых левых частей по i , в том числе и для максимальной:

$$\max_{i=1, I-1} |u_j^k|(1+\gamma) \leq \gamma \left(\max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \max_{j=0, I} |u_j^k| \right) + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}||1-\gamma| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Потребуем выполнения условия $(1-\gamma) \geq 0$. Тогда неравенство можно записать в следующем виде:

$$\max_{i=1, I-1} |u_j^k|(1+\gamma) \leq \gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad k = \overline{1, K}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим первое граничное условие:

$$\left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - \frac{D}{h_x^2} u_1^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_1^{k-1} + \alpha^k.$$

Домножим его на h_t :

$$(H\gamma h_x + \gamma + 1)u_0^k = \gamma u_1^k + (-H\gamma h_x - \gamma + 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1} + \alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$(H\gamma h_x + \gamma + 1)|u_0^k| \leq \gamma |u_1^k| + |-H\gamma h_x - \gamma + 1| |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Усилим неравенство:

$$|u_0^k|(\gamma + 1) \leq \gamma |u_1^k| + |-H\gamma h_x - \gamma + 1| |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Потребуем выполнения условия $(1-\gamma-H\gamma h_x) \geq 0$. Тогда:

$$|u_0^k|(\gamma + 1) \leq \gamma |u_1^k| + (-H\gamma h_x - \gamma + 1) |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Воспользуемся уже введенными оценками (3.13):

$$\begin{aligned}
|u_0^k|(\gamma + 1) &\leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + (-H\gamma h_x + 1) \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \\
|u_0^k|(\gamma + 1) &\leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично для второго граничного условия получим:

$$|u_I^k|(\gamma + 1) \leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \tag{4.6}$$

Объединим неравенства (4.4), (4.5) и (4.6):

$$\max_{i=0,I} |u_j^k| (1 + \gamma) \leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad k = \overline{1, K}.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Рассмотрим последнее неравенство при различных значениях $k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned}
k = 1: \quad \max_{j=0,I} |u_j^1| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\
k = 2: \quad \max_{j=0,I} |u_j^2| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\
&\dots \\
k = K: \quad \max_{j=0,I} |u_j^K| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = \\
&= (1 + T) \|f_h\|_{F_h} = C \|f_h\|_{F_h}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где $C = 1 + T$.

Таким образом, схема (4.3) является устойчивой при условии $(1 - \gamma - H\gamma h_x) \geq 0$.

4.4 Метод прогонки для разностной схемы Кранка-Николсон

Аналогично методу прогонки для простейшей неявной схемы, представим разностную схему (4.3) в виде, удобном для вычислений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma u_{i-1}^k + (2\gamma + 2)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ (H\gamma h_x + \gamma + 1)u_0^k - \gamma u_1^k = -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ -\gamma u_{I-1}^k + (H\gamma h_x + \gamma + 1)u_I^k = \gamma u_{I-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_I^{k-1}, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Представим нахождение значений сеточной функции очередного временного слоя как решение СЛАУ:

$$A \begin{pmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_I^k \end{pmatrix} = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} H\gamma h_x + \gamma + 1 & -\gamma & & & 0 \\ & -\gamma & 2\gamma + 2 & -\gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma & 2\gamma + 2 & -\gamma \\ 0 & & & & -\gamma & H\gamma h_x + \gamma + 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1} \\ \gamma u_0^{k-1} - (2\gamma - 2)u_1^{k-1} + \gamma u_2^{k-1} \\ \vdots \\ \gamma u_{I-2}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_{I-1}^{k-1} + \gamma u_I^{k-1} \\ \gamma u_{I-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_I^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания:

$$\begin{aligned} |H\gamma h_x + \gamma + 1| &> |-\gamma|, \\ |2\gamma + 2| &> |-\gamma| + |-\gamma|. \end{aligned}$$

Сформулируем задачу в терминах метода прогонки:

$$A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i,$$

$$\begin{aligned} i=0: \quad & A_i = 0, \quad B_i = H\gamma h_x + \gamma + 1, \\ & C_i = -\gamma, \quad D_i = -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1}, \\ i=\overline{1, I-1}: \quad & A_i = -\gamma, \quad B_i = 2\gamma + 2, \\ & C_i = -\gamma, \quad D_i = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1}, \\ i=I: \quad & A_i = -\gamma, \quad B_i = H\gamma h_x + \gamma + 1, \\ & C_i = 0, \quad D_i = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Совершая прямой проход, потребуем, чтобы $A'_i = 0$ и $B'_i = 1$:

$$u_i^k + C'_i u_{i+1}^k = D'_i,$$

$$\begin{aligned} i=0: \quad & C'_i = \frac{C_i}{B_i}, \quad D'_i = \frac{D_i}{B_i}, \\ i=\overline{1, I}: \quad & C'_i = \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}}, \quad D'_i = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}. \end{aligned}$$

Это позволяет нам выразить искомые неизвестные в процессе обратного прохода:

$$\begin{aligned} i=\overline{0, I-1}: \quad & u_i^k = D'_i - C'_i u_{i+1}^k, \\ i=I: \quad & u_i^k = D'_i. \end{aligned}$$

Аналогично простейшей неявной схеме, полное выражение метода прогонки будет выглядеть как:

$$\begin{aligned} i=0: \quad & u_i^k = \frac{-(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1} + \gamma u_{i+1}^k}{H\gamma h_x + \gamma + 1}, \\ i=\overline{1, I-1}: \quad & u_i^k = \frac{\gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1} + \gamma D'_{i-1} + \gamma u_{i+1}^k}{2\gamma + 2 + \gamma C'_{i-1}}, \\ i=I: \quad & u_i^k = \frac{\gamma u_{i-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma D'_{i-1}}{H\gamma h_x + \gamma + 1 + \gamma C'_{i-1}}. \end{aligned}$$

4.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсон

Выше было доказано, что:

- схема Кранка-Николсон (4.3) аппроксимирует решение краевой задачи (1.3) с порядками аппроксимации $O(h_x^2, h_t^2)$;
- схема (4.3) является условно устойчивой с условием $1 - \gamma - H\gamma h_x \geq 0$.

Отсюда следует, что схема (4.3) сходится к решению краевой задачи (1.3) при выполнении условия $1 - \gamma - H\gamma h_x \geq 0$, причем скорость сходимости является квадратичной как по h_x , так и по h_t .

4.6 Графическое представление решения простейшей неявной разностной схемы

Аналогично разделу 2.6 приведем несколько примеров решений, рассчитанных с помощью программы.

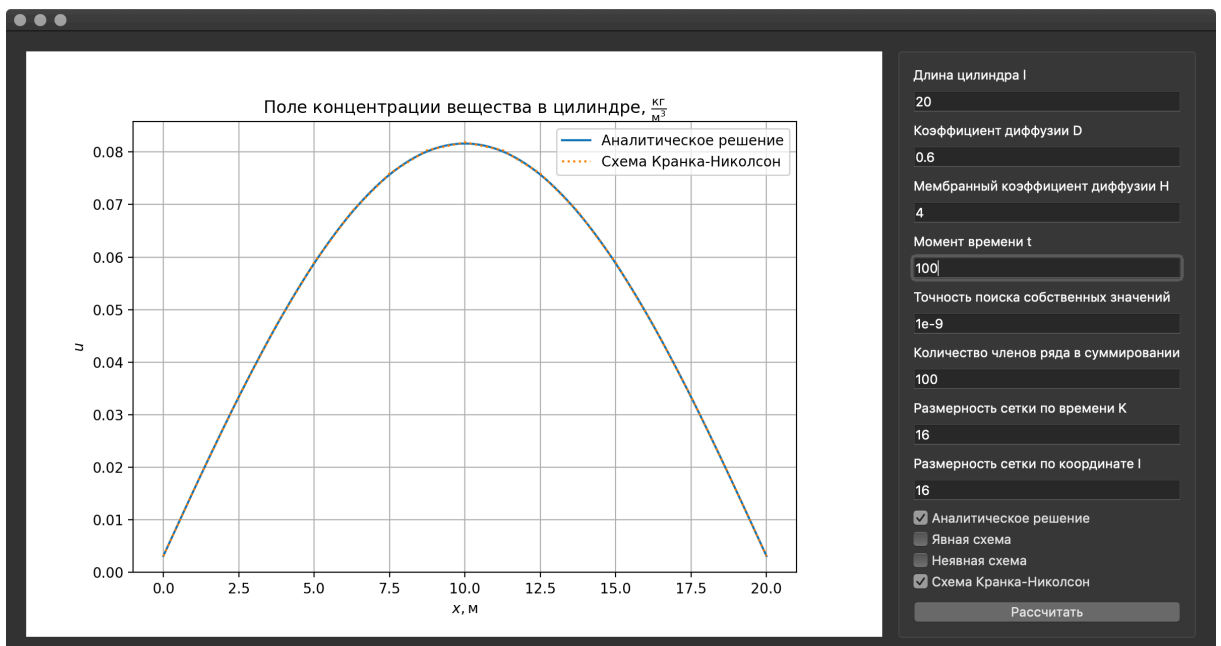


Рисунок 6 — Схема Кранка-Николсон с параметрами $t = 100, l = 16, K = 16$

Рисунок 6 показывает, что схема хорошо аппроксимирует точное решение даже для небольших сеток и в большой момент времени.

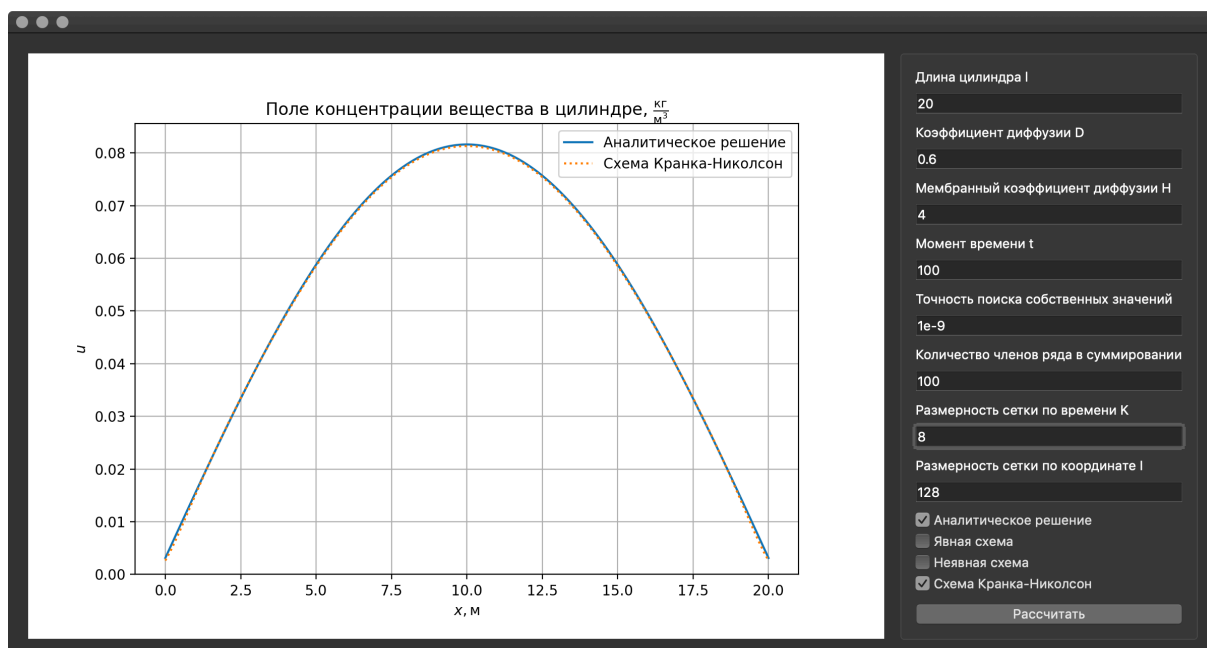


Рисунок 7 — Схема Кранка-Николсон с параметрами $t = 100, l = 128, K = 8$

Рисунок 7 иллюстрирует ситуацию, когда для схемы Кранка-Николсон не выполняется условие сходимости. Однако она все равно хорошо аппроксимирует точное решение, возможно, с меньшими порядками аппроксимации.

4.7 Экспериментальное исследование погрешности

Теоретический результат показал, что схема Кранка-Николсон аппроксимирует точное решение с порядками $O(h_x^2, h_t^2)$. Проведем эмпирическую оценку порядков аппроксимации численного решения аналогично разделу 2.7.

Для проверки гипотезы о том, что схема Кранка-Николсон аппроксимирует точное решение со вторым порядком относительно h_x и вторым порядком относительно h_t , сравним значения нормы ошибки для сеток размерностей (I, K) и $(2I, 2K)$. Если отношение ошибок приблизительно равно четырем, то гипотеза выполняется. Однако следует помнить о том, что схема Кранка-Николсон устойчива только условно, поэтому мы рассмотрим оба случая.

Таблица 4 — Ошибки схемы Кранка-Николсон для разных сеток при выполнении условия устойчивости.

I	K	$2I$	$2K$	$\varepsilon(h_x, h_t)$	$\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)$	$\frac{\varepsilon(h_x, h_t)}{\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)}$
4	128	8	256	0,01306699	0,00317128	4,1204
8	256	16	512	0,00317128	0,00078747	4,0271
16	512	32	1024	0,00078747	0,00025620	3,0735
32	1024	64	2048	0,00025620	0,00007294	3,5122
64	2048	128	4096	0,00007294	0,00002077	3,5114

Таблица 4 показывает, что теоретический результат совпадает с результатом численного эксперимента.

Таблица 5 — Ошибки схемы Кранка-Николсон для разных сеток при невыполнении условия устойчивости.

I	K	$2I$	$2K$	$\varepsilon(h_x, h_t)$	$\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)$	$\frac{\varepsilon(h_x, h_t)}{\varepsilon\left(\frac{h_x}{2}, \frac{h_t}{2}\right)}$
4	4	8	8	0,00782460	0,00535374	1,4615
8	8	16	16	0,00535374	0,00369565	1,4486
16	16	32	32	0,00369565	0,00203414	1,8168
32	32	64	64	0,00203414	0,00099567	2,0429
64	64	128	128	0,00099567	0,00045878	2,1702
128	128	256	256	0,00045878	0,00020378	2,2512
256	256	512	512	0,00020378	0,00008785	2,3194
512	512	1024	1024	0,00008785	0,00003648	2,4079

Таблица 5 иллюстрирует тот факт, что при невыполнении условия сходимости схема Кранка-Николсон аппроксимирует точное решение краевой задачи не с квадратичными порядками относительно шагов по координате и времени, а с меньшими.

5 Описание программы

Для решения задачи диффузии в цилиндре было разработано оконное приложение на языке Python 3.7 с использованием библиотек:

- PyQt5 v5.12.1;
- Numpy v.1.16.2;
- Scipy v1.2.1;
- Matplotlib v3.0.3.

Программа позволяет визуализировать результаты аналитического и численного решений задачи (1.3). Программа позволяет задать любые корректные параметры задачи и алгоритмов решения. Рисунок 8 иллюстрирует внешний вид программы.

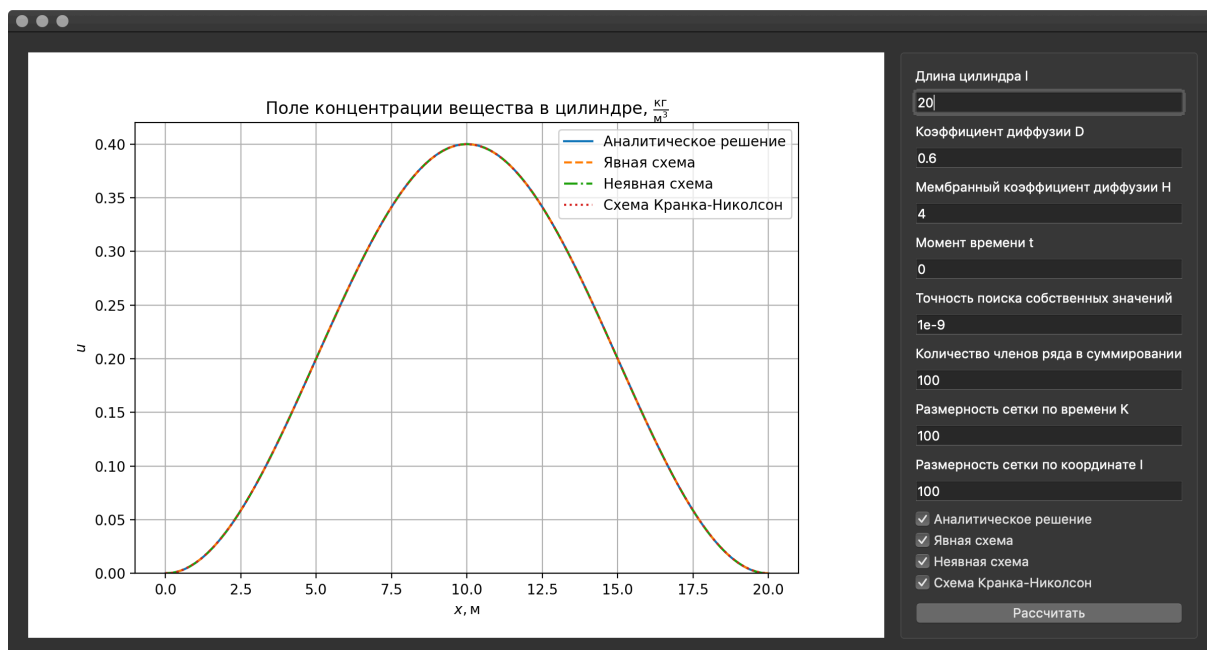


Рисунок 8 — Интерфейс оконного приложения

Программа содержит обработчик ошибок и корректно реагирует на неверный пользовательский ввод.

Рассмотрим несколько примеров использования программы для маленьких сеток. Рисунок 9, Рисунок 10, Рисунок 11 и Рисунок 12 иллюстрируют работу программы для различных входных параметров.

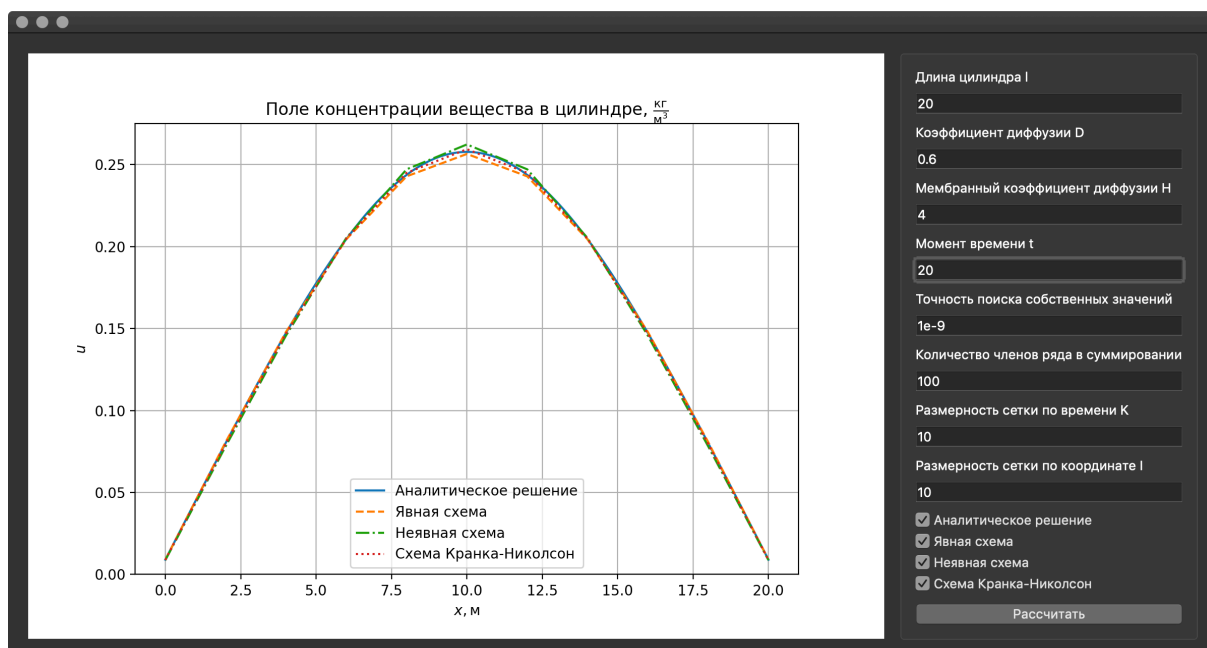


Рисунок 9 — Распределение концентрации вещества при $t=20$, $I=10$, $K=10$

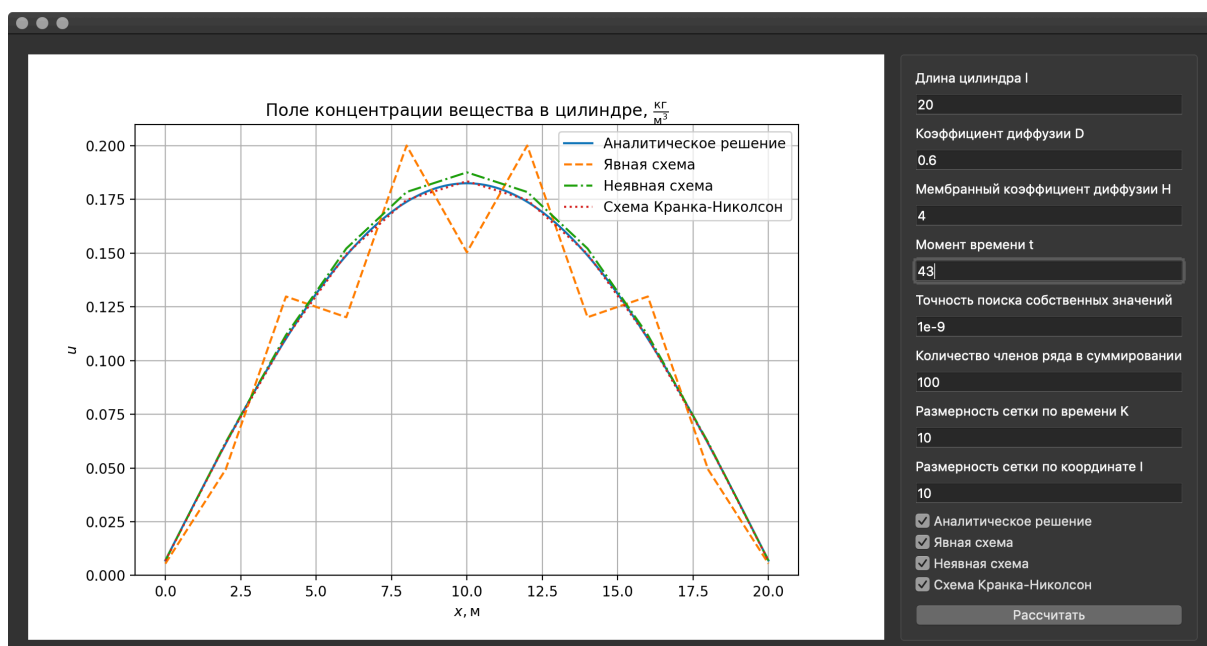


Рисунок 10 — Распределение концентрации вещества при $t=43$, $I=10$, $K=10$

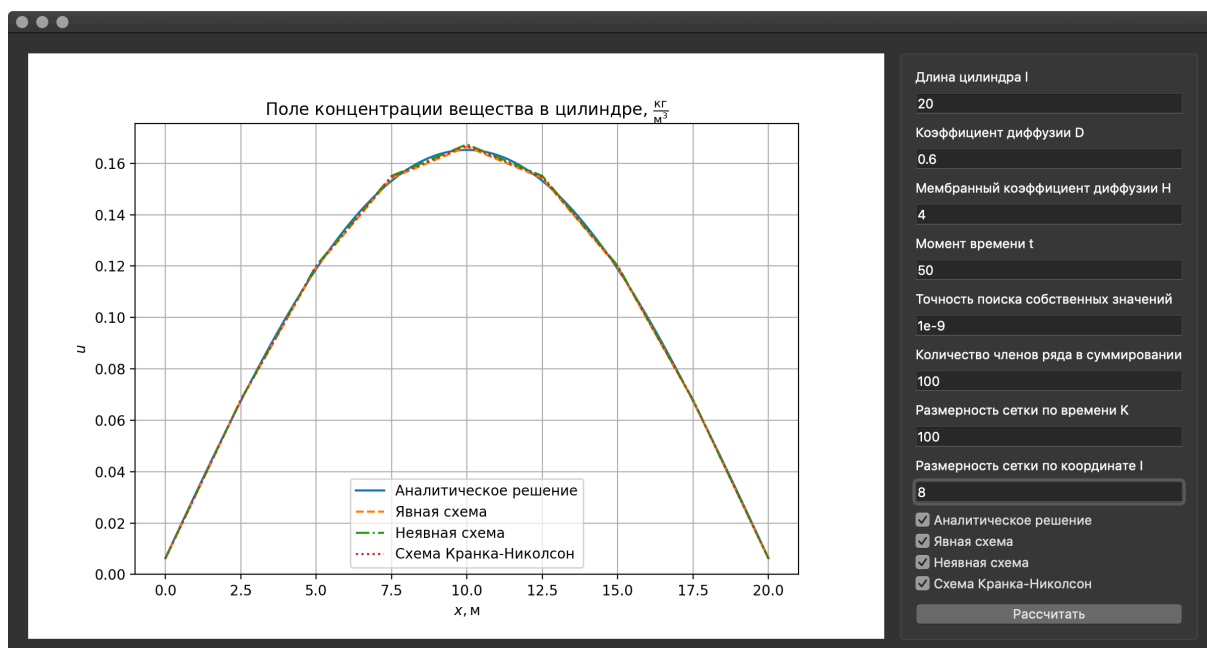


Рисунок 11 — Распределение концентрации вещества при $t=50$, $I=8$, $K=100$

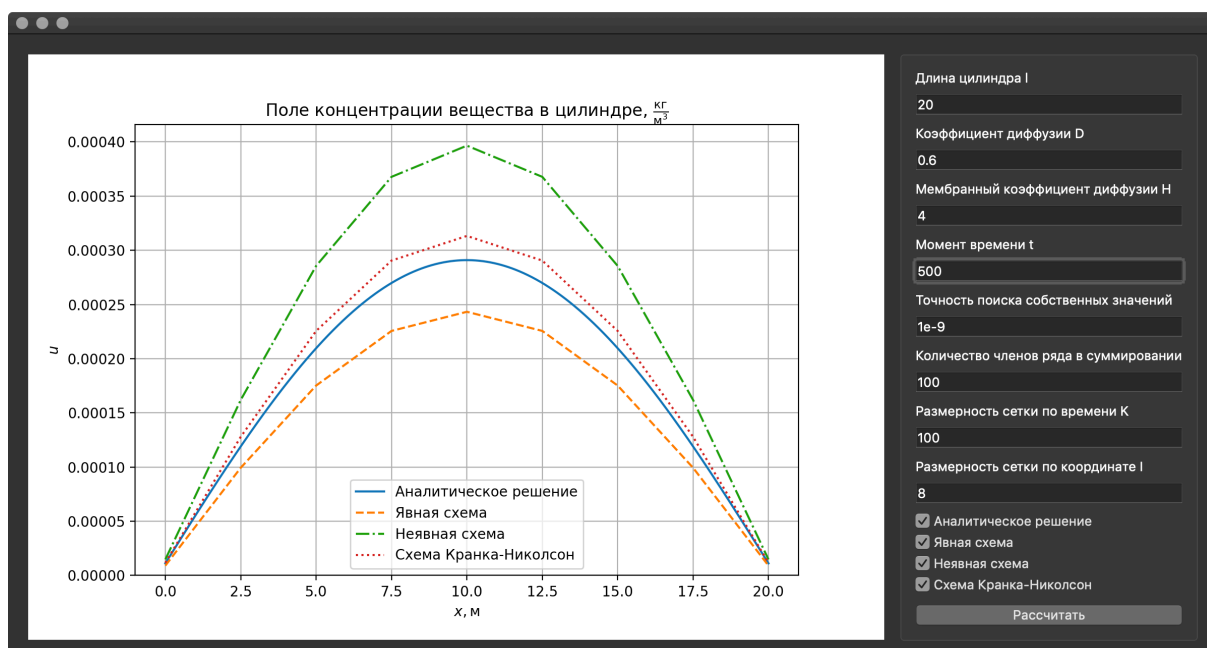


Рисунок 12 — Распределение концентрации вещества при $t=500$, $I=8$, $K=100$

Можно заметить, что в среднем схема Кранка-Николсон аппроксимирует точное решение краевой задачи лучше остальных. Также можно видеть, что явная схема очень сильно расходится при нарушении условия сходимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения диффузии в цилиндре. Для численного решения краевой задачи построены три разностные схемы: простейшая явная схема, простейшая неявная схема повышенного порядка аппроксимации и схема Кранка-Николсон повышенного порядка аппроксимации.

Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что простейшая явная схема аппроксимирует исходную краевую задачу с первыми порядками относительно шагов сетки, простейшая неявная повышенного порядка — с первым порядком относительно шага по интервалу времени и вторым относительно шага по длине цилиндра, а схема Кранка-Николсон повышенного порядка аппроксимации — со вторыми порядками относительно обоих шагов. Также в результате исследования установлено, что простейшая неявная схема является безусловно устойчивой, в то время как простейшая явная схема и схема Кранка-Николсон условно устойчивы, причем схема Кранка-Николсон оказалась значительно менее требовательной к мелкости сетки по переменной времени.

Высокоточное решение тестовой задачи получено методом разделения переменных в виде ряда Фурье. Для контроля погрешности аналитического решения использована оценка остатка ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что фактическая погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью всех схем, убывает с измельчением шагов сетки при соблюдении условий устойчивости. При этом порядки убывания погрешности численного решения оказались близкими к порядкам, полученным при теоретическом исследовании. Однако при нарушении условий устойчивости ситуация резко менялась: схема Кранка-Николсон обнаруживала заметное

замедление сходимости численного решения, а явная схема и вовсе показывала расхожимость.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов [Текст] / Владимиров В.С., Жаринов В.В. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 399 с.

2 Matplotlib: a plotting library for the Python programming language [Электронный ресурс] – 2018. – URL: <https://matplotlib.org/> (дата обращения: 22.12.2018).

3 SymPy: a Python library for symbolic mathematics. [Электронный ресурс] – 2018. – URL: <https://docs.sympy.org/latest/index.html> (дата обращения: 22.12.2018).

4 Бахвалов Н.С. Численные методы: учебное пособие для физ.-мат. специальностей вузов [Текст] / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Н.М. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2007. – 636 с.

5 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОД ИНТЕРФЕЙСА ОКОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ

```
import sys
from PyQt5.QtWidgets import QApplication, QGridLayout, QGroupBox, QLabel,
QLineEdit, QMessageBox, QPushButton, \
    QSizePolicy, QVBoxLayout, QWidget, QCheckBox
from matplotlib.backends.backend_qt5agg import FigureCanvasQTAgg as
FigureCanvas
from matplotlib.figure import Figure
from solvers.crank_nicolson import CrankNicolsonSolver
from solvers.explicit import ExplicitSolver
from solvers.implicit import ImplicitSolver
from solvers.theoretical import TheoreticalSolver
class App(QWidget):
    def __init__(self):
        super().__init__()
        self.theoretical_solver = TheoreticalSolver()
        self.explicit_solver = ExplicitSolver()
        self.implicit_solver = ImplicitSolver()
        self.crank_nicolson_solver = CrankNicolsonSolver()
        self.solvers = [
            self.theoretical_solver,
            self.explicit_solver,
            self.implicit_solver,
            self.crank_nicolson_solver,
        ]
        self.grid = QGridLayout()
        self.setLayout(self.grid)
        self.resize(1200, 600)
        self.plot = PlotCanvas(width=10, height=4)
        self.grid.addWidget(self.plot, 1, 1, 1, 1)
        param_box = QGroupBox()
        param_vbox = QVBoxLayout()
        param_vbox.addWidget(QLabel('Длина цилиндра l'))
        self.l_field = QLineEdit('20')
        # self.l_field.setStyleSheet("color: black;")
        param_vbox.addWidget(self.l_field)
        param_vbox.addWidget(QLabel('Коэффициент диффузии D'))
        self.D_field = QLineEdit('0.6')
        # self.D_field.setStyleSheet("color: black;")
        param_vbox.addWidget(self.D_field)
        param_vbox.addWidget(QLabel('Мембранный коэффициент диффузии H'))
        self.H_field = QLineEdit('4')
        # self.H_field.setStyleSheet("color: black;")
        param_vbox.addWidget(self.H_field)
        param_vbox.addWidget(QLabel('Момент времени t'))
        self.t_field = QLineEdit('0')
        # self.t_field.setStyleSheet("color: black;")
        param_vbox.addWidget(self.t_field)
        param_vbox.addWidget(QLabel('Точность поиска собственных значений'))
        self.eps_field = QLineEdit('1e-9')
        # self.eps_field.setStyleSheet("color: black;")
        param_vbox.addWidget(self.eps_field)
        param_vbox.addWidget(QLabel('Количество членов ряда в суммировании'))
        self.sum_count_field = QLineEdit('100')
        # self.sum_count_field.setStyleSheet("color: black;")
```

```

param_vbox.addWidget(self.sum_count_field)
param_vbox.addWidget(QLabel('Размерность сетки по времени K'))
self.K_field = QLineEdit('100')
# self.K_field.setStyleSheet("color: black;")
param_vbox.addWidget(self.K_field)
param_vbox.addWidget(QLabel('Размерность сетки по координате I'))
self.I_field = QLineEdit('100')
# self.I_field.setStyleSheet("color: black;")
param_vbox.addWidget(self.I_field)
self.theoretical_checkbox = QCheckBox('Аналитическое решение')
self.theoretical_checkbox.setChecked(True)
param_vbox.addWidget(self.theoretical_checkbox)
self.explicit_checkbox = QCheckBox('Явная схема')
self.explicit_checkbox.setChecked(True)
param_vbox.addWidget(self.explicit_checkbox)
self.implicit_checkbox = QCheckBox('Неявная схема')
self.implicit_checkbox.setChecked(True)
param_vbox.addWidget(self.implicit_checkbox)
self.crank_nicolson_checkbox = QCheckBox('Схема Кранка-Николсон')
self.crank_nicolson_checkbox.setChecked(True)
param_vbox.addWidget(self.crank_nicolson_checkbox)
calc_button = QPushButton('Рассчитать')
calc_button.pressed.connect(self.calc)
param_vbox.addWidget(calc_button)
param_vbox.addStretch(1)
param_box.setLayout(param_vbox)
self.grid.addWidget(param_box, 1, 2, 1, 1)
self.calc()
def show_error(self, text):
    msg = QMessageBox()
    msg.setIcon(QMessageBox.Information)
    msg.setText(text)
    msg.setWindowTitle("Ошибка расчетов")
    msg.setStandardButtons(QMessageBox.Ok)
    msg.exec_()
def calc(self):
    try:
        l_str = self.l_field.text()
        l_val = float(l_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {l_str}')
        return
    try:
        D_str = self.D_field.text()
        D_val = float(D_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {D_str}')
        return
    try:
        H_str = self.H_field.text()
        H_val = float(H_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {H_str}')
        return
    try:
        t_str = self.t_field.text()
        t_val = float(t_str)
    except Exception as e:

```



```

        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {t_str}')
        return
    try:
        eps_str = self.eps_field.text()
        eps_val = float(eps_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {eps_str}')
        return
    try:
        sum_count_str = self.sum_count_field.text()
        sum_count_val = int(sum_count_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {sum_count_str}')
        return
    try:
        K_str = self.K_field.text()
        K_val = int(K_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {K_str}')
        return
    try:
        I_str = self.I_field.text()
        I_val = int(I_str)
    except Exception as e:
        self.show_error(f'Некорректный формат числа: {I_str}')
        return
    if not (
        1e-3 <= l_val <= 1e+3 and
        1e-3 <= D_val <= 1e+3 and
        1e-3 <= H_val <= 1e+3 and
        0 <= t_val <= 1e+3 and
        1e-20 <= eps_val <= 1e+3 and
        1 <= sum_count_val <= 1e+3 and
        1 <= K_val <= 1e+4 and
        1 <= I_val <= 1e+4
    ):
        self.show_error(f'Некорректные входные данные')
        return
    for solver in self.solvers:
        solver.set_params(
            l=l_val,
            D=D_val,
            H=H_val,
            t=t_val,
            eps=eps_val,
            sum_count=sum_count_val,
            K=K_val,
            I=I_val,
        )
    self.plot.prep()
    if self.theoretical_checkbox.isChecked():
        plot_x, plot_y = self.theoretical_solver.calc()
        self.plot.plot(plot_x, plot_y, label='Аналитическое решение',
linestyle='-')
    if self.explicit_checkbox.isChecked():
        plot_x, plot_y = self.explicit_solver.calc()
        self.plot.plot(plot_x, plot_y, label='Явная схема', linestyle='--')
    if self.implicit_checkbox.isChecked():

```

```

        plot_x, plot_y = self.implicit_solver.calc()
        self.plot.plot(plot_x, plot_y, label='Неявная схема', linestyle='-.')
    if self.crank_nicolson_checkbox.isChecked():
        plot_x, plot_y = self.crank_nicolson_solver.calc()
        self.plot.plot(plot_x, plot_y, label='Схема Кранка-Николсон',
linestyle=':')
        self.plot.show()
class PlotCanvas(FigureCanvas):
    def __init__(self, parent=None, width=4, height=4, dpi=100):
        fig = Figure(figsize=(width, height), dpi=dpi)
        self.axes = fig.add_subplot(111)
        FigureCanvas.__init__(self, fig)
        self.setParent(parent)
        FigureCanvas.setSizePolicy(self, QSizePolicy.Expanding,
QSizePolicy.Expanding)
        FigureCanvas.updateGeometry(self)
    def prep(self):
        self.axes.clear()
    def plot(self, plot_x, plot_y, **kwargs):
        self.axes.plot(plot_x, plot_y, **kwargs)
    def show(self):
        self.axes.set_xlabel('$x, \mathrm{M}$')
        self.axes.set_ylabel('$u$')
        self.axes.set_title('Поле концентрации вещества в цилиндре,
$\\frac{\mathrm{kr}}{\mathrm{M}^3}$')
        self.axes.set_ylim(0, None)
        self.axes.legend()
        self.axes.grid(True)
        self.draw()
if __name__ == '__main__':
    app = QApplication(sys.argv)
    ex = App()
    ex.show()
    sys.exit(app.exec_())

```