МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе
Дисциплина: «Численные методы математической физики»

Тема: «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»

Вариант №8

Выполнили студенты Анурин А.С.
Гринина В.С.
Попов Д.С.

Группа 6407-010302D

Преподаватель Дегтярев А.А.

САМАРА 2019

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.
5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.
6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

ВАРИАНТ 8

Разработать программу расчета динамики поля концентрации вещества в цилиндре на временном промежутке $0 < t \le T$. Для численных расчетов использовать:

- простейшую явную конечно-разностную схему (Попов Д.С.);
- простейшую неявную конечно-разностную схему (Анурин А.С.);
- конечно-разностную схему Кранка-Николсон (Гринина В.С.).

В цилиндре конечной длины l находится диффундирующее вещество, концентрация частиц которого в момент времени $t = 0$ описывается функцией:

$$\tilde{u}\,|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \le x \le l,$$

где x — числовая ось, направленная вдоль оси цилиндра.

Коэффициент диффузии вещества является постоянным и равен D. Концы цилиндра закрыты полунепроницаемыми мембранами, через которые происходит диффузия вещества. Предполагается, что поток вещества через мембраны пропорционален разности концентраций вещества во внешней среде и в цилиндре, т.е.:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - H(\tilde{u} - \tilde{u}_c)\right]_{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + H(\tilde{u} - \tilde{u}_c)\right]_{x=l} = 0,$$

где $\tilde{u}_c$ — концентрация вещества во внешней по отношению к цилиндру среде, H — мембранный коэффициент диффузии.

Боковая поверхность цилиндра является непроницаемой.

Процесс диффузии вещества сопровождается явлением размножения его частиц, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна их концентрации в этой точке. Коэффициент пропорциональности равен β.

Концентрацию вещества считать одинаковой во всех точках поперечного сечения цилиндра в любой момент времени.

При проведении расчетов использовать значения параметров и выражение функции, указанные преподавателем:

$l = 20$м,

$D = 0.6$м²/с,

$\tilde{u}_c = 0$кг/м³,

$H = 4$м²/с,

$T = 100$с,

$\beta = 0$,

$\tilde{\psi}(x) = 0.4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$ кг/м³.

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи диффузии. Вычислительный алгоритм основан на использовании разностной схемы Кранка-Николсона. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи диффузии.

1 Математическая постановка задачи

Рассмотрим цилиндр конечной длины, концентрация вещества которого в точке пространства (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $\tilde{u}(x, y, z, t)$.

Математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{u}_t(x,t) = D\tilde{u}_{xx}(x,t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \le T; \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \le x \le l; \\ \tilde{u}_x(0,t) = H\left(\tilde{u}(0,t) - \tilde{u}_c\right), & 0 < t \le T; \\ \tilde{u}_x(l,t) = -H\left(\tilde{u}(0,t) - \tilde{u}_c\right), & 0 < t \le T. \end{cases} \tag{1.1}$$

Сделаем замену $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) + w(x,t)$ [1] так, чтобы граничные условия задачи (1.1) стали однородными.

$$\begin{cases} u(x,0) + w(x,0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \le x \le l; \\ u_x(0,t) + w_x(0,t) = H\left(u(0,t) + w(0,t) - \tilde{u}_c\right), & 0 < t \le T; \\ u_x(l,t) + w_x(l,t) = -H\left(u(l,t) + w(l,t) - \tilde{u}_c\right), & 0 < t \le T. \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, мы можем взять $w(x,t) = \tilde{u}_c$.

Тогда после замены итоговая математическая модель будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \le T; \\ u(x,0) = \tilde{\psi}(x) - \tilde{u}_c = \psi(x), & 0 \le x \le l; \\ u_x(0,t) - Hu(0,t) = 0, & 0 < t \le T; \\ u_x(l,t) + Hu(l,t) = 0, & 0 < t \le T. \end{cases} \tag{1.3}$$

2 Простейшая явная разностная схема (Попов Д.С.)

2.1 Построение простейшей явной разностной схемы

Для построения простейшей явной схемы определим равномерную сетку как множество узлов:

$$x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l}{I};$$
$$t_k = kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K}; \tag{2.1}$$

где I – число интервалов разбиения промежутка $0 \le x \le l$, а K – число интервалов разбиения отрезка времени $0 \le t \le T$.

Для построения схемы задачи (1.3) заменим все функции непрерывных аргументов x и t их сеточными аналогами, а производные — нижеприведенными разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t}, \tag{2.3}$$

и для граничных условий:

$$\frac{\partial u(x_0, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_1, t_k) - u(x_0, t_k)}{h_x}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u(x_I, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_I, t_k) - u(x_{I-1}, t_k)}{h_x}. \tag{2.5}$$

В результате получим следующую явную схему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_i^{k+1}-u_i^k}{h_t}=D\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad i=\overline{1,I-1}, \quad k=\overline{0,K-1};\\
u_i^0=\psi_i, \qquad i=\overline{0,I};\\
\dfrac{u_1^k-u_0^k}{h_x}-Hu_0^k=0, \qquad k=\overline{1,K};\\
\dfrac{u_I^k-u_{I-1}^k}{h_x}+Hu_I^k=0, \qquad k=\overline{1,K},
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

где u_i^k — решение этой системы в узле $\left(x_i,t_k\right)$, $\psi_i=\psi\left(x_i\right)$, h_x — шаг разбиения по длине цилиндра, h_t — шаг разбиения по интервалу времени.

2.2 Аппроксимация простейшей явной разностной схемы

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие

$$
\lim_{h\to0}\left\|\delta f_h\right\|_{F_h}=\lim_{h\to0}\left\|L_h[u]_h-f_h\right\|_{F_h}=0 \tag{2.7}
$$

при произвольном выборе последовательности равномерно сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы будет иметь следующую структуру:

$$
\delta f_h=\left\{\begin{array}{c}\delta f_h^1\\ \delta f_h^2\\ \delta f_h^3\\ \delta f_h^4\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}L_h^1[u]_h-f_h^1\\ L_h^2[u]_h-f_h^2\\ L_h^3[u]_h-f_h^3\\ L_h^4[u]_h-f_h^4\end{array}\right\}. \tag{2.8}
$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (2.8) по отдельности. Начнем с первой:

$$
\begin{gathered}
\left\{\delta f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=\left\{L_h^1[u]_h-f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=\\
=\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{h_t}-D\frac{u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)}{h_x^2}.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Проведем разложение по формуле Тейлора значений $u\left(x_i,t_{k+1}\right)$, $u\left(x_i,t_{k-1}\right)$, $u\left(x_{i+1},t_k\right)$, $u\left(x_{i-1},t_k\right)$ в точке $\left(x_i,t_k\right)$ и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

$$\begin{gathered}
\left\{\delta f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=\left\{\frac{1}{h_t}\left[u+u_t'h_t+\frac{u_{tt}''h_t^2}{2}+O(h_t^3)-u\right]-\right.\\
-\frac{D}{h_x^2}\left[u+u_x'h_x+\frac{u_{xx}''h_x^2}{2}+\frac{u_{xxx}'''h_x^3}{6}+O(h_x^4)-2u\right]-\\
\left.-\frac{D}{h_x^2}\left[u-u_x'h_x+\frac{u_{xx}''h_x^2}{2}-\frac{u_{xxx}'''h_x^3}{6}+O(h_x^4)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}= \qquad (2.10)\\
=\left\{\frac{1}{h_t}\left[u_t'h_t+\frac{u_{tt}''h_t^2}{2}+O(h_t^3)\right]-\frac{D}{h_x^2}\left[u_{xx}''h_x^2+O(h_x^4)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=\\
=\left\{u_t'+0.5u_{tt}''h_t-Du_{xx}''+O(h_x^2,h_t^2)\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}.
\end{gathered}$$

Воспользуемся первым уравнением краевой задачи (1.3), тогда (2.10) упростится до

$$\left\{\delta f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=\left\{\frac{u_{tt}''h_t}{2}+O(h_x^2,h_t^2)\right\}_{x=x_i}^{t=t_k}=O(h_x^2,h_t). \qquad (2.11)$$

Для второй компоненты невязки в соответствии с начальным условием краевой задачи (1.3) будем иметь:

$$\left\{\delta f_h^2\right\}_{x=x_i}^{t=t_0}=\left\{L_h^2[u]_h-f_h^2\right\}_{x=x_i}^{t=0}=u(x_i,0)-\psi(x_i)=0. \qquad (2.12)$$

Рассмотрим третью компоненту невязки и проведем разложение в ряд Тейлора значения $u(x_1,t_k)$ в точке (x_0,t_k):

$$\left\{\delta f_h^3\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{L_h^3[u]_h - f_h^3\right\}_{x=0}^{t=t_k} = \frac{u(x_1,t_k)-u(x_0,t_k)}{h_x} - Hu(x_0,t_k) =$$

$$= \left\{\frac{1}{h_x}\left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx}h_x^2}{2} + O(h_x^3) - u\right] - Hu\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \qquad (2.13)$$

$$= \left\{u'_x + \frac{u''_{xx}h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu\right\}_{x=x_0}^{t=t_k}.$$

Используя первое граничное условие краевой задачи (1.3), получим:

$$\left\{\delta f_h^3\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{u'_x + \frac{u''_{xx}h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{\frac{u''_{xx}h_x}{2} + O(h_x^2)\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x). \qquad (2.14)$$

Аналогично для последней компоненты невязки получим:

$$\left\{\delta f_h^4\right\}_{x=x_I}^{t=t_k} = O(h_x). \qquad (2.15)$$

В итоге получили:

$$\delta f_h = \left\{\begin{array}{c} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} O(h_x^2, h_t) \\ 0 \\ O(h_x) \\ O(h_x) \end{array}\right\}. \qquad (2.16)$$

Определим норму в пространстве F_h следующим образом:

$$\left\|f_h\right\|_{F_h} = \max\left\{\max_{\substack{i=1,I-1 \\ k=0,K-1}}\left|\left\{f_h^1\right\}_{x_i}^{t_k}\right|, \max_{i=0,I}\left|\left\{f_h^2\right\}_{x_i}^{t_0}\right|, \max_{k=1,K}\left|\left\{f_h^3\right\}_{x_0}^{t_k}\right|, \max_{k=1,K}\left|\left\{f_h^4\right\}_{x_I}^{t_k}\right|\right\}.$$

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой выше будет иметь вид:

$$\left\|\delta f_h\right\|_{F_h} = \max\left\{O(h_x^2, h_t), 0, O(h_x), O(h_x)\right\} = O(h_x, h_t). \qquad (2.17)$$

Из последней формулы сразу вытекает предельное равенство

$$\lim_{h \to 0} \left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = 0 \qquad (2.18)$$

Итак, в результате исследования получено, что простейшая явная разностная схема (2.6) аппроксимирует краевую задачу (1.3) на ее решении u, причем погрешность аппроксимации имеет первый порядок как по h_x, так и h_t.

2.3 Устойчивость простейшей явной разностной схемы

Ждет Дису

2.4 Алгоритм решения

??

2.5 Исследование сходимости простейшей явной разностной схемы

3 Простейшая неявная разностная схема (Анурин А.С.)

3.1 Построение простейшей неявной разностной схемы

Для построения простейшей неявной схемы задачи (1.3) воспользуемся ранее введенной сеткой (2.1). Заменим производные следующими разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x_i,t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)}{h_x^2}, \\ &\frac{\partial u(x_i,t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i,t_k)-u(x_i,t_{k-1})}{h_t}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

и разностными отношениями (2.4) и (2.5) для граничных условий.

В результате получим простейшую неявную разностную схему:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k-u_i^{k-1}}{h_t} = D\dfrac{u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i=\overline{1,I-1}, \quad k=\overline{1,K}; \\ u_i^0=\psi_i, & i=\overline{0,I}; \\ \dfrac{u_1^k-u_0^k}{h_x}-Hu_0^k=0, & k=\overline{1,K}; \\ \dfrac{u_I^k-u_{I-1}^k}{h_x}+Hu_I^k=0, & k=\overline{1,K}. \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структуре невязки для простейшей явной схемы (2.8).

Рассматривая отдельно каждую компоненту невязки и действуя по аналогии с исследованием аппроксимации простейшей явной схемы, получим:

$$\left\{\delta f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{L_h^1[u]_h - f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \frac{u(x_i,t_k)-u(x_i,t_{k-1})}{h_t} - D\frac{u(x_{i+1},t_k)-2u(x_i,t_k)+u(x_{i-1},t_k)}{h_x^2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{h_t}\left[u-u+u_t'h_t-\frac{u_{tt}''h_t^2}{2}+O(h_t^3))\right]-\right.$$

$$-\frac{D}{h_x^2}\left[u+u_x'h_x+\frac{u_{xx}''h_x^2}{2}+\frac{u_{xxx}'''h_x^3}{6}+O(h_x^4)-2u\right]-$$

$$\left.-\frac{D}{h_x^2}\left[u-u_x'h_x+\frac{u_{xx}''h_x^2}{2}-\frac{u_{xxx}'''h_x^3}{6}+O(h_x^4)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{u_t'-\frac{u_{tt}''h_t}{2}+O(h_t^2)-D\left[u_{xx}''+O(h_x^2)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{-\frac{u_{tt}''h_t}{2}+O(h_t^2)+O(h_x^2)\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \tag{3.3}$$

$$= O(h_x^2, h_t);$$

$$\left\{\delta f_h^2\right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = \left\{L_h^2[u]_h - f_h^2\right\}_{x=x_i}^{t=0} = u(x_i,0)-\psi(x_i) = 0; \tag{3.4}$$

$$\left\{\delta f_h^3\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x); \tag{3.5}$$

$$\left\{\delta f_h^4\right\}_{x=x_I}^{t=t_k} = O(h_x). \tag{3.6}$$

Соответственно порядок аппроксимации разностной схемы (3.2) будет:

$$\left\|\delta f_h\right\|_{F_h} = O(h_x, h_t).$$

Заметим, что оба граничные условия имеют лишь первый порядок аппроксимации по шагу h_x, в то время, как дифференциальное уравнение задачи аппроксимировано со вторым порядком.

Повысим порядок аппроксимации для граничных условий. Заменим производные в граничных условиях не левым и правым аналогами, а центральными. Тогда неявная разностная схема повышенного порядка будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad i = \overline{0,I}, \quad k = \overline{1,K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \qquad i = \overline{0,I}; \\ \dfrac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, \qquad k = \overline{1,K}; \\ \dfrac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, \qquad k = \overline{1,K}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Отметим, что значение в дополнительных узлах u_{-1}^k и u_{I+1}^k не имеют физического смысла, поэтому запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \qquad i = \overline{1,I-1}, \quad k = \overline{1,K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \qquad i = \overline{0,I}; \\ \left(2H\dfrac{D}{h_x} + 2\dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right)u_0^k - 2\dfrac{D}{h_x^2}u_1^k - \dfrac{1}{h_t}u_0^{k-1} = 0, \qquad k = \overline{1,K}; \\ \left(2H\dfrac{D}{h_x} + 2\dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right)u_I^k - 2\dfrac{D}{h_x^2}u_{I-1}^k - \dfrac{1}{h_t}u_I^{k-1} = 0, \qquad k = \overline{1,K}. \end{cases}$$

Для граничных условий схемы повышенного порядка невязки будут выглядеть так:

$$\left\{\delta f_h^3\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{ \frac{1}{2h_x}\left[u + u' h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O\left(h_x^4\right) \right] + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2h_x}\left[-u + u' h_x - \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2h_x}\left[2u'_x h_x + \frac{2u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \tag{3.8}$$

$$= \left\{ u'_x + \frac{u'''_{xxx} h_x^2}{6} + O(h_x^3) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u'''_{xxx} h_x^2}{6} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2);$$

$$\left\{\delta f_h^4\right\}_{x=x_I}^{t=t_k} = O(h_x^2). \tag{3.9}$$

Полученные невязки являются квадратичными относительно параметра дискретизации h_x. Следовательно, порядок аппроксимации разностной схемы (3.7) будет выше, чем схемы (3.2), а именно:

$$\left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = O(h_x^2, h_t).$$

3.3 Устойчивость простейшей неявной разностной схемы

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\left\| u_h \right\|_{U_h} \le C \left\| f_h \right\|_{F_h}$, где C — константа

Зададим возмущение разностной схеме (3.7):

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D\dfrac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\
u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\
\left(2H\dfrac{D}{h_x} + 2\dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right)u_0^k - 2\dfrac{D}{h_x^2}u_1^k - \dfrac{1}{h_t}u_0^{k-1} = \alpha^k, & k = \overline{1, K}; \\
\left(2H\dfrac{D}{h_x} + 2\dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right)u_I^k - 2\dfrac{D}{h_x^2}u_{I-1}^k - \dfrac{1}{h_t}u_I^{k-1} = \beta^k, & k = \overline{1, K}.
\end{cases}
$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, явно полученного с помощью метода прогонки.

Проверим выполнение второго условия устойчивости. Для этого сначала определим нормы:

$$
\left\|u_h\right\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{0,I} \\ k=\overline{0,K}}} \left|u_i^k\right|; \tag{3.10}
$$

$$
\left\|f_h\right\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1,I-1} \\ k=\overline{0,K}}} \left|\varphi_i^k\right| + \max_{i=\overline{0,I}} \left|\psi_i\right| + \max_{k=\overline{1,K}} \left|\alpha^k\right| + \max_{k=\overline{1,K}} \left|\beta^k\right|. \tag{3.11}
$$

Рассмотрим первое дифференциальное уравнение разностной схемы с возмущением. Домножим его на h_t и введем $\gamma = \dfrac{Dh_t}{h_x^2} > 0.$ Тогда уравнение примет следующий вид:

$$
u_i^k\left(1 + 2\gamma\right) = u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^k + \gamma u_{i-1}^k + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}.
$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$
\left|u_i^k\right|\left(1 + 2\gamma\right) \le \left|u_i^{k-1}\right| + \gamma\left(\left|u_{i+1}^k\right| + \left|u_{i-1}^k\right|\right) + \left|\varphi_i^k\right| h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}. \tag{3.12}
$$

Определим следующие оценки:

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi_i^k\right| \le \left\|f_h\right\|_{F_h}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}; \\
&\left|u_i^k\right| \le \max_{j=\overline{0,I}} \left|u_j^k\right| \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Воспользуемся данными оценками в неравенстве (3.12):

$$\left|u_i^k\right|\left(1+2\gamma\right) \le \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t, \quad i=\overline{1,I-1}, \quad k=\overline{1,K}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i, то оно справедливо для любых левых частей по i, в том числе и максимальной. Следовательно, получаем следующее неравенство:

$$\max_{j=1,I-1}\left|u_j^k\right|\left(1+2\gamma\right) \le \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + 2\gamma \max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t. \tag{3.14}$$

Теперь рассмотрим первое граничное условие. Также домножим его на h_t и сделаем замену γ:

$$\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)u_0^k = 2\gamma u_1^k + u_0^{k-1} + \alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для того, чтобы оценить величину $\left|u_k^i\right|$:

$$\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)\left|u_0^k\right| \le 2\gamma\left|u_1^k\right| + \left|u_0^{k-1}\right| + \left|\alpha^k\right| h_t.$$

Из определения (3.11) следует, что $\left|\alpha^k\right| \le \left\|f_h\right\|$:

$$\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)\left|u_0^k\right| \le 2\gamma\left|u_1^k\right| + \left|u_0^{k-1}\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t.$$

Воспользуемся оценками (3.13):

$$\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)\left|u_0^k\right| \le 2\gamma \max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t.$$

Заменим $\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)$ на $\left(2\gamma+1\right)$, так как $(2H\gamma h_x \ge 0)$:

$$\left(2\gamma + 1\right)\left|u_0^k\right| \le 2\gamma \max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t. \tag{3.15}$$

Аналогичным образом из второго граничного условия

$$\left(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1\right)u_I^k = 2\gamma u_{I-1}^k + u_I^{k-1} + \beta^k h_t$$

можем получить следующее неравенство:

$$\left(2\gamma + 1\right)\left|u_I^k\right| \le 2\gamma \max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t. \tag{3.16}$$

Объединив неравенства (3.14), (3.15) и (3.16), получим следующее:

$$\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|\left(1+2\gamma\right) \le \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + 2\gamma\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right| \le \max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right| + \left\|f_h\right\|_{F_h} h_t. \tag{3.17}$$

Рассмотрим финальное неравенство (3.17) при различных значениях $k=\overline{1,K}$:

$k=1$: $\quad \max_{j=0,I}\left|u_j^1\right| \le \max_{j=0,I}\left|u_j^0\right| + h_t\left\|f_h\right\|_{F_h} \le \left(1+h_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h}$;

$k=2$: $\quad \max_{j=0,I}\left|u_j^2\right| \le \max_{j=0,I}\left|u_j^1\right| + h_t\left\|f_h\right\|_{F_h} \le \left(1+2h_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h}$;

…

$k=K$: $\quad \max_{j=0,I}\left|u_j^K\right| \le \max_{j=0,I}\left|u_j^{K-1}\right| + h_t\left\|f_h\right\|_{F_h} \le \left(1+Kh_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h} = (1+T)\left\|f_h\right\|_{F_h} = C\left\|f_h\right\|_{F_h}$.

Следовательно, $\left\|u_h\right\|_{U_h} \le C\left\|f_h\right\|_{F_h}$, где $C=1+T$.

Таким образом, схема (3.7) является безусловно устойчивой.

3.4 Метод прогонки для простейшей неявной разностной схемы

3.5 Исследование сходимости простейшей неявной разностной схемы

4 Разностная схема Кранка-Николсон (Гринина В.С.)

4.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсон

Для построения схемы Кранка-Николсон заменим область непрерывного изменения аргументов функции $u(x,t)$ равномерной сеткой (2.1).

Взяв шеститочечный шаблон, рассмотрим наряду с основными узлами сетки вспомогательный узел $\left(x_i, t_k + \dfrac{h_t}{2}\right)$. Используя этот узел, запишем дифференциальные уравнения простейших явной и неявной схем:

$$\frac{u_i^{k+\frac{1}{2}} - u_i^k}{h_t/2} = D\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \tag{4.1}$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k+\frac{1}{2}}}{h_t/2} = D\frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2}. \tag{4.2}$$

Умножим оба уравнения на $\dfrac{1}{2}$ и сложим их, также допишем начальное и граничные условия повышенного порядка аппроксимации. Получим разностную схему Кранка-Николсон:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \dfrac{1}{2}D\dfrac{\left(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k\right) + \left(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}\right)}{h_x^2}, & i = \overline{0,I}, \quad k = \overline{0,K-1}; \\ u_i^0 = \varphi_i, & i = \overline{0,I}; \\ \dfrac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, & k = \overline{1,K}; \\ \dfrac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, & k = \overline{1,K}. \end{cases}$$

(4.3)

4.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсон

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структурам невязок для предыдущих схем.

Аналогично неявной схеме с повышенной точностью аппроксимации, вторая, третья и четвертая невязки будут:

$$\left\{\delta f_h^2\right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = 0;$$

$$\left\{\delta f_h^3\right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2);$$

$$\left\{\delta f_h^4\right\}_{x=x_I}^{t=t_k} = O(h_x^2).$$

Рассмотрим первую невязку:

$$\left\{\delta f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{L_h^1[u]_h - f_h^1\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \frac{u(x_i,t_{k+1}) - u(x_i,t_k)}{h_t} - \frac{D}{2}\frac{u(x_{i+1},t_k) - 2u(x_i,t_k) + u(x_{i-1},t_k)}{h_x^2} -$$

$$- \frac{D}{2}\frac{u(x_{i+1},t_{k+1}) - 2u(x_i,t_{k+1}) + u(x_{i-1},t_{k+1})}{h_x^2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{h_t}\left[u + u_t' h_t + \frac{u_{tt}'' h_t^2}{2} + \frac{u_{ttt}''' h_t^3}{6} + O(h_t^4) - u\right] - \frac{D}{2h_x^2}\left[u + u_x' h_x + \frac{u_{xx}'' h_x^2}{2} + \frac{u_{xxx}''' h_x^3}{6} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^4}{24} + O(h_x^5) - 2u + u - u_x' h_x + \frac{u_{xx}'' h_x^2}{2} - \frac{u_{xxx}''' h_x^3}{6} + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^4}{24} + O(h_x^5)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} -$$

$$- \left\{\frac{D}{2h_x^2}\left[u + u_x' h_x + \frac{u_{xx}'' h_x^2}{2} + \frac{u_{xxx}''' h_x^3}{6} + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2u + u - u_x' h_x + \frac{u_{xx}'' h_x^2}{2} - \frac{u_{xxx}''' h_x^3}{6} + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^4}{24} + O(h_x^5)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}} =$$

$$= \left\{\left[u_t' + \frac{u_{tt}'' h_t}{2} + \frac{u_{ttt}''' h_t^2}{6} + O(h_t^3)\right] - D\left[\frac{u_{xx}''}{2} + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^2}{24} + O(h_x^3)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} -$$

$$- \left\{D\left[\frac{u_{xx}''}{2} + \frac{u_{xxxx}'''' h_x^2}{24} + O(h_x^3)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}} =$$

$$= \left\{\frac{u_t'}{2} + \frac{u_{tt}'' h_t}{2} + \frac{u_{ttt}''' h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D\frac{u_{xxxx}'''' h_x^2}{24} + O(h_x^3)\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} -$$

$$- \left\{\frac{D}{2}\left[u_{xx}'' + u_{xxt}''' h_t + \frac{u_{xxtt}'''' h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= \left\{\frac{u_{ttt}''' h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D\frac{u_{xxxx}'''' h_x^2}{24} + O(h_x^3) - \frac{D}{2}\left[\frac{u_{xxtt}'''' h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2)\right]\right\}_{x=x_i}^{t=t_k} =$$

$$= O(h_x^2, h_t^2).$$

Следовательно, порядок аппроксимации разностной схемы Кранка-Николсон квадратичный как относительно шага h_x, так и h_t.

4.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсон

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\left\|u_h\right\|_{U_h} \le C\left\|f_h\right\|_{F_h}$, где C — константа.

Зададим возмущение разностной схеме (4.3):

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \dfrac{1}{2} D \dfrac{\left(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}\right) + \left(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k\right)}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \\ & k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \left(H\dfrac{D}{h_x} + \dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right) u_0^k - \dfrac{D}{h_x^2} u_1^k = \left(-H\dfrac{D}{h_x} - \dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right) u_0^{k-1} + \dfrac{D}{h_x^2} u_1^{k-1} + \alpha^k, & k = \overline{1, K}; \\ \left(H\dfrac{D}{h_x} + \dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right) u_I^k - \dfrac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k = \left(-H\dfrac{D}{h_x} - \dfrac{D}{h_x^2} + \dfrac{1}{h_t}\right) u_I^{k-1} + \dfrac{D}{h_x^2} u_{I-1}^{k-1} + \beta^k, & k = \overline{1, K}. \end{cases}$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, полученного с помощью метода прогонки.

Будем использовать уже введенные нормы (3.10) и (3.11). Рассмотрим первое уравнение возмущенной разностной схемы. Домножим его на h_t и введем $\gamma = \dfrac{Dh_t}{h_x^2} > 0$:

$$u_i^k\left(1+\gamma\right) = \frac{\gamma}{2}\left(u_{i+1}^{k-1} + u_{i-1}^{k-1} + u_{i+1}^k + u_{i-1}^k\right) + u_i^{k-1}\left(1-\gamma\right) + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left|u_i^k\right|\left(1+\gamma\right) \le \frac{\gamma}{2}\left(\left|u_{i+1}^{k-1}\right|+\left|u_{i-1}^{k-1}\right|+\left|u_{i+1}^{k}\right|+\left|u_{i-1}^{k}\right|\right)+\left|u_i^{k-1}\right|\left|1-\gamma\right|+\left|\varphi_i^k\right|h_t, \quad i=\overline{1,I-1}.$$

И воспользуемся оценками (3.13):

$$\left|u_i^k\right|\left(1+\gamma\right) \le \gamma\left(\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k}\right|\right)+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|\left|1-\gamma\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t, \quad i=\overline{1,I-1}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i, то данное неравенство справедливо для любых i в его левой части, в том числе и для максимального:

$$\max_{i=1,I-1}\left|u_j^k\right|\left(1+\gamma\right) \le \gamma\left(\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k}\right|\right)+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|\left|1-\gamma\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t.$$

Потребуем выполнения условия $\left(1-\gamma\right)\ge 0$. Тогда неравенство можно записать в следующем виде:

$$\max_{i=\overline{1,I-1}}\left|u_j^k\right|\left(1+\gamma\right) \le \gamma\max_{j=\overline{0,I}}\left|u_j^{k}\right|+\max_{j=\overline{0,I}}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t, \quad k=\overline{1,K}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим первое граничное условие:

$$\left(H\frac{D}{h_x}+\frac{D}{h_x^2}+\frac{1}{h_t}\right)u_0^k-\frac{D}{h_x^2}u_1^k=\left(-H\frac{D}{h_x}-\frac{D}{h_x^2}+\frac{1}{h_t}\right)u_0^{k-1}+\frac{D}{h_x^2}u_1^{k-1}+\alpha^k.$$

Домножим его на h_t и введем $\gamma=\dfrac{Dh_t}{h_x^2}$:

$$\left(H\gamma h_x+\gamma+1\right)u_0^k=\gamma u_1^k+\left(-H\gamma h_x-\gamma+1\right)u_0^{k-1}+\gamma u_1^{k-1}+\alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\left(H\gamma h_x+\gamma+1\right)\left|u_0^k\right|\le\gamma\left|u_1^k\right|+\left|-H\gamma h_x-\gamma+1\right|\left|u_0^{k-1}\right|+\gamma\left|u_1^{k-1}\right|+\left|\alpha^k\right|h_t.$$

Ослабим неравенство:

$$\left|u_0^k\right|\left(\gamma+1\right)\le\gamma\left|u_1^k\right|+\left|-H\gamma h_x-\gamma+1\right|\left|u_0^{k-1}\right|+\gamma\left|u_1^{k-1}\right|+\left|\alpha^k\right|h_t.$$

Потребуем выполнения условия $\left(1-\gamma-H\gamma h_x\right)\ge 0$. Тогда:

$$\left|u_0^k\right|\left(\gamma+1\right)\le\gamma\left|u_1^k\right|+\left(-H\gamma h_x-\gamma+1\right)\left|u_0^{k-1}\right|+\gamma\left|u_1^{k-1}\right|+\left|\alpha^k\right|h_t.$$

Воспользуемся уже введенными оценками (3.13):

$$\left|u_0^k\right|\left(\gamma+1\right)\le\gamma\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|+\left(-H\gamma h_x+1\right)\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t,$$

$$\left|u_0^k\right|\left(\gamma+1\right)\le\gamma\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t. \qquad (4.5)$$

Аналогично для второго граничного условия получим:

$$\left|u_I^k\right|\left(\gamma+1\right)\le\gamma\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t. \qquad (4.6)$$

Объединим неравенства (4.4), (4.5) и (4.6):

$$\max_{i=0,I}\left|u_j^k\right|\left(1+\gamma\right)\le\gamma\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|+\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t,\quad k=\overline{1,K}.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I}\left|u_j^k\right|\le\max_{j=0,I}\left|u_j^{k-1}\right|+\left\|f_h\right\|_{F_h}h_t.$$

Рассмотрим последнее неравенство при различных значениях $k=\overline{1,K}$:

$$k=1:\qquad \max_{j=0,I}\left|u_j^1\right|\le\max_{j=0,I}\left|u_j^0\right|+h_t\left\|f_h\right\|_{F_h}\le\left(1+h_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h};$$

$$k=2:\qquad \max_{j=0,I}\left|u_j^2\right|\le\max_{j=0,I}\left|u_j^1\right|+h_t\left\|f_h\right\|_{F_h}\le\left(1+2h_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h};$$

$$\dots$$

$$k=K:\qquad \begin{aligned}&\max_{j=0,I}\left|u_j^K\right|\le\max_{j=0,I}\left|u_j^{K-1}\right|+h_t\left\|f_h\right\|_{F_h}\le\left(1+Kh_t\right)\left\|f_h\right\|_{F_h}=\\&=(1+T)\left\|f_h\right\|_{F_h}=C\left\|f_h\right\|_{F_h}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\left\|u_h\right\|_{U_h}\le C\left\|f_h\right\|_{F_h}$, где $C=1+T$.

Таким образом, схема (н) является устойчивой при условии $\left(1-\gamma-H\gamma h_x\right)\ge 0$, где $\gamma=\dfrac{Dh_t}{h_x^2}$.

4.4 Метод прогонки для разностной схемы Кранка-Николсон

4.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсон

5 Описание программы

6 Исследование погрешности с помощью вычислительного эксперимента

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в круге. Для численного решения краевой задачи построены две разностные схемы: схема Кранка-Николсона и простейшая явная схема.

Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что схема Кранка-Николсона аппроксимирует исходную краевую задачи со вторыми порядками относительно шагов сетки, а простейшая явная схема – с первыми порядками. Также в результате исследования установлено, что обе схемы являются условно устойчивыми, причем схема Кранка-Николсона оказалась значительно менее требовательной к мелкости сетки по переменной времени.

Для проверки фактической сходимости разностных схем был использован тестовый пример, предложенный преподавателем.

Высокоточное решение тестовой задачи получено методом разделения переменных в виде ряда Фурье-Бесселя. Для контроля погрешности аналитического решения использована оценка остатка ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что фактическая погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью обеих схем, убывает с измельчением шагов сетки при соблюдении условий устойчивости. При этом порядки убывания погрешности численного решения оказалась близкими к порядкам, полученным при теоретическом исследовании. Однако при нарушении условий устойчивости ситуация резко менялась: Схема Кранка-Николсона обнаруживала заметное замедление сходимости численного решения, а явная схема показывала расходимость.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов [Текст] / Владимиров В.С., Жаринов В.В. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 399 с.

2 Matplotlib: a plotting library for the Python programming language [Электронный ресурс] – 2018. – URL: https://matplotlib.org/ (дата обращения: 22.12.2018).

3 SymPy: a Python library for symbolic mathematics. [Электронный ресурс] – 2018. – URL: https://docs.sympy.org/latest/index.html (дата обращения: 22.12.2018).

4 Бахвалов Н.С. Численные методы: учебное пособие для физ.-мат. специальностей вузов [Текст] / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Н.М. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2007. – 636 с.

5 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
КОД ИНТЕРФЕЙСА ОКОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ