

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

Отчет по курсовой работе
Дисциплина: «Численные методы математической физики»

**Тема: «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ»**

Вариант №8

Выполнили студенты

Анурин А.С.
Григина В.С.
Попов Д.С.

Группа 6407-010302D

Преподаватель

Дегтярев А.А.

ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.
2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.
3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.
4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.
5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.
6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

ВАРИАНТ 8

Разработать программу расчета динамики поля концентрации вещества в цилиндре на временном промежутке $0 < t \leq T$. Для численных расчетов использовать:

- простейшую явную конечно-разностную схему (Попов Д.С.);
- простейшую неявную конечно-разностную схему (Анурин А.С.);
- конечно-разностную схему Кранка-Николсон (Гринина В.С.).

В цилиндре конечной длины l находится диффундирующее вещество, концентрация частиц которого в момент времени $t = 0$ описывается функцией:

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где x — числовая ось, направленная вдоль оси цилиндра.

Коэффициент диффузии вещества является постоянным и равен D . Концы цилиндра закрыты полунепроницаемыми мембранами, через которые происходит диффузия вещества. Предполагается, что поток вещества через мембраны пропорционален разности концентраций вещества во внешней среде и в цилиндре, т.е.:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - H(\tilde{u} - \tilde{u}_c) \right]_{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + H(\tilde{u} - \tilde{u}_c) \right]_{x=l} = 0,$$

где $\tilde{u}_c$ — концентрация вещества во внешней по отношению к цилиндру среде, H — мембранный коэффициент диффузии.

Боковая поверхность цилиндра является непроницаемой.

Процесс диффузии вещества сопровождается явлением размножения его частиц, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна их концентрации в этой точке. Коэффициент пропорциональности равен β .

Концентрацию вещества считать одинаковой во всех точках поперечного сечения цилиндра в любой момент времени.

При проведении расчетов использовать значения параметров и выражение функции, указанные преподавателем:

$$l = 20\text{м},$$

$$D = 0.6\text{м}^2/\text{с},$$

$$\tilde{u}_c = 0\text{кг}/\text{м}^3,$$

$$H = 4\text{м}^2/\text{с},$$

$$T = 100\text{с},$$

$$\beta = 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) = 0.4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) \text{кг}/\text{м}^3.$$

ВВЕДЕНИЕ

Характеризуя метод конечных разностей необходимо выделить его достоинства и недостатки в сравнении с другими методами.

К достоинствам метода конечных разностей следует отнести его высокую универсальность, например, значительно более высокую, чем у аналитических методов. Применение этого метода нередко характеризуется относительной простотой построения решающего алгоритма и его программной реализации. Зачастую удается осуществить распараллеливание решающего алгоритма.

К числу недостатков метода следует отнести: проблематичность его использования на нерегулярных сетках; очень быстрый рост вычислительной трудоемкости при увеличении размерности задачи (увеличении числа неизвестных переменных); сложность аналитического исследования свойств разностной схемы.

Суть метода конечных разностей состоит в замене исходной (непрерывной) задачи математической физики ее дискретным аналогом (разностной схемой), а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

В настоящей работе метод конечных разностей применен для численного решения задачи диффузии. Вычислительный алгоритм основан на использовании разностной схемы Кранка-Николсона. Проведено теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сделан вывод о сходимости сеточного решения к точному решению исходной задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая алгоритм скалярной прогонки. Приведены графические результаты численного решения задачи диффузии.

1 Математическая постановка задачи

Equation Chapter (Next) Section 1 Рассмотрим цилиндр конечной длины, концентрация вещества которого в точке пространства (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $\tilde{u}(x, y, z, t)$.

Математическая модель будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_t(x, t) = D\tilde{u}_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l; \\ \tilde{u}_x(0, t) = H(\tilde{u}(0, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T; \\ \tilde{u}_x(l, t) = -H(\tilde{u}(l, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Сделаем замену $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + w(x, t)$ [1] так, чтобы граничные условия задачи (1.1) стали однородными.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x, 0) + w(x, 0) = \tilde{\psi}(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_x(0, t) + w_x(0, t) = H(u(0, t) + w(0, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T; \\ u_x(l, t) + w_x(l, t) = -H(u(l, t) + w(l, t) - \tilde{u}_c), & 0 < t \leq T. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Очевидно, мы можем взять $w(x, t) = \tilde{u}_c$.

Тогда после замены итоговая математическая модель будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) = \tilde{\psi}(x) - \tilde{u}_c = \psi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ u_x(0, t) - Hu(0, t) = 0, & 0 < t \leq T; \\ u_x(l, t) + Hu(l, t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

2 Простейшая явная разностная схема (Попов Д.С.)

2.1 Построение простейшей явной разностной схемы

Equation Chapter (Next) Section 1 Для построения простейшей явной схемы определим равномерную сетку как множество узлов:

$$\begin{aligned}x_i &= ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l}{I}; \\t_k &= kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K};\end{aligned}\tag{2.1}$$

где I – число интервалов разбиения промежутка $0 \leq x \leq l$, а K – число интервалов разбиения отрезка времени $0 \leq t \leq T$.

Для построения схемы задачи (1.3) заменим все функции непрерывных аргументов x и t их сеточными аналогами, а производные — нижеприведенными разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2},\tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t},\tag{2.3}$$

и для граничных условий:

$$\frac{\partial u(x_0, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_1, t_k) - u(x_0, t_k)}{h_x},\tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u(x_I, t_k)}{\partial x} \approx \frac{u(x_I, t_k) - u(x_{I-1}, t_k)}{h_x}.\tag{2.5}$$

В результате получим следующую явную схему:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} - Hu_0^k = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} + Hu_I^k = 0, & k = \overline{1, K}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

где u_i^k — решение этой системы в узле (x_i, t_k) , $\psi_i = \psi(x_i)$, h_x — шаг разбиения по длине цилиндра, h_t — шаг разбиения по интервалу времени.

2.2 Аппроксимация простейшей явной разностной схемы

В соответствии с определением аппроксимации, проверим, выполняется ли условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = \lim_{h \rightarrow 0} \|L_h[u]_h - f_h\|_{F_h} = 0 \quad (2.7)$$

при произвольном выборе последовательности равномерно сгущающихся сеток.

Невязка δf_h для рассматриваемой схемы будет иметь следующую структуру:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_h^1[u]_h - f_h^1 \\ L_h^2[u]_h - f_h^2 \\ L_h^3[u]_h - f_h^3 \\ L_h^4[u]_h - f_h^4 \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим каждую компоненту невязки (2.8) по отдельности. Начнем с первой:

$$\begin{aligned} \{\delta f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \{L_h^1[u]_h - f_h^1\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\ &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t} - D \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{h_x^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Проведем разложение по формуле Тейлора значений $u(x_i, t_{k+1})$, $u(x_i, t_{k-1})$, $u(x_{i+1}, t_k)$, $u(x_{i-1}, t_k)$ в точке (x_i, t_k) и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u + u'_t h_t + \frac{u''_{tt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) - u \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) - 2u \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u'_t h_t + \frac{u''_{tt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \frac{D}{h_x^2} \left[u''_{xx} h_x^2 + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_t + 0.5 u''_{tt} h_t - D u''_{xx} + O(h_x^2, h_t^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Воспользуемся первым уравнением краевой задачи (1.3), тогда (2.10) упростится до

$$\left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u''_{tt} h_t}{2} + O(h_x^2, h_t^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = O(h_x^2, h_t). \tag{2.11}$$

Для второй компоненты невязки в соответствии с начальным условием краевой задачи (1.3) будем иметь:

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=0} = u(x_i, 0) - \psi(x_i) = 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим третью компоненту невязки и проведем разложение в ряд Тейлора значения $u(x_1, t_k)$ в точке (x_0, t_k) :

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ L_h^3[u]_h - f_h^3 \right\}_{x=0}^{t=t_k} = \frac{u(x_1, t_k) - u(x_0, t_k)}{h_x} - Hu(x_0, t_k) = \\
&= \left\{ \frac{1}{h_x} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + O(h_x^3) - u \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_x + \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Используя первое граничное условие краевой задачи (1.3), получим:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ u'_x + \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{u''_{xx} h_x}{2} + O(h_x^2) \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Аналогично для последней компоненты невязки получим:

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x). \tag{2.15}$$

В итоге получили:

$$\delta f_h = \begin{Bmatrix} \delta f_h^1 \\ \delta f_h^2 \\ \delta f_h^3 \\ \delta f_h^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O(h_x^2, h_t) \\ 0 \\ O(h_x) \\ O(h_x) \end{Bmatrix}. \tag{2.16}$$

Определим норму в пространстве F_h следующим образом:

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left\{ \max_{\substack{i=1, I-1 \\ k=0, K-1}} \left| \left\{ f_h^1 \right\}_{x_i}^{t_k} \right|, \max_{i=0, I} \left| \left\{ f_h^2 \right\}_{x_i}^{t_0} \right|, \max_{k=1, K} \left| \left\{ f_h^3 \right\}_{x_0}^{t_k} \right|, \max_{k=1, K} \left| \left\{ f_h^4 \right\}_{x_l}^{t_k} \right| \right\}.$$

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой выше будет иметь вид:

$$\|\delta f_h\|_{F_h} = \max \left\{ O(h_x^2, h_t), 0, O(h_x), O(h_x) \right\} = O(h_x, h_t). \tag{2.17}$$

Из последней формулы сразу вытекает предельное равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f_h\|_{F_h} = 0 \quad (2.18)$$

Итак, в результате исследования получено, что простейшая явная разностная схема (2.6) аппроксимирует краевую задачу (1.3) на ее решении u , причем погрешность аппроксимации имеет первый порядок как по h_x , так и h_t .

2.3 Устойчивость простейшей явной разностной схемы

Ждет Диску

2.4 Алгоритм решения

??

2.5 Исследование сходимости простейшей явной разностной схемы

3 Простейшая неявная разностная схема (Анурин А.С.)

3.1 Построение простейшей неявной разностной схемы

Equation Chapter (Next) Section 1 Для построения простейшей неявной схемы задачи (1.3) воспользуемся ранее введенной сеткой (2.1). Заменим производные следующими разностными отношениями для дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} &\approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2}, \\ \frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} &\approx \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1}))}{h_t},\end{aligned}\tag{3.1}$$

и разностными отношениями (2.4) и (2.5) для граничных условий.

В результате получим простейшую неявную разностную схему:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} &= D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 &= \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_0^k}{h_x} - Hu_0^k &= 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_I^k - u_{I-1}^k}{h_x} + Hu_I^k &= 0, & k = \overline{1, K}. \end{aligned} \right.\tag{3.2}$$

3.2 Аппроксимация простейшей неявной разностной схемы

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структуре невязки для простейшей явной схемы (2.8).

Рассматривая отдельно каждую компоненту невязки и действуя по аналогии с исследованием аппроксимации простейшей явной схемы, получим:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = \frac{u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k-1})}{h_t} - D \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2} = \\
& = \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u - u + u'_t h_t - \frac{u''_t h_t^2}{2} + O(h_t^3) \right] - \right. \\
& - \frac{D}{h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) - 2u \right] - \\
& \left. - \frac{D}{h_x^2} \left[u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = \left\{ u'_t - \frac{u''_t h_t}{2} + O(h_t^2) - D \left[u''_{xx} + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = \left\{ -\frac{u''_t h_t}{2} + O(h_t^2) + O(h_x^2) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = O(h_x^2, h_t);
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = \left\{ L_h^2[u]_h - f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = u(x_i, 0) - \psi(x_i) = 0; \tag{3.4}$$

$$\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x); \tag{3.5}$$

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x). \tag{3.6}$$

Соответственно степень аппроксимации разностной схемы (3.2) будет выражаться как:

$$\left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = O(h_x, h_t).$$

Заметим, что оба граничные условия имеют лишь первый порядок аппроксимации по шагу h_x , в то время как дифференциальное уравнение задачи аппроксимировано со вторым порядком.

Повысим порядок аппроксимации для граничных условий. Заменяем производные в граничных условиях не левым и правым аналогами, а

центральными. Тогда неявная разностная схема повышенного порядка будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Отметим, что значение в дополнительных узлах u_{-1}^k и u_{I+1}^k не имеют физического смысла, поэтому запишем схему в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_1^k - \frac{1}{h_t} u_0^{k-1} = 0, & k = \overline{1, K}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k - \frac{1}{h_t} u_I^{k-1} = 0, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Для граничных условий схемы повышенного порядка невязки будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}
\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} &= \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[u + u'h_x + \frac{u''h_x^2}{2} + \frac{u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2h_x} \left[-u + u'h_x - \frac{u''h_x^2}{2} + \frac{u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ \frac{1}{2h_x} \left[2u'h_x + \frac{2u'''h_x^3}{6} + O(h_x^4) \right] - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \\
&= \left\{ u'_x + \frac{u'''h_x^2}{6} + O(h_x^3) - Hu \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = \left\{ \frac{u'''h_x^2}{6} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2);
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x^2). \tag{3.9}$$

Полученные невязки являются квадратичными относительно параметра дискретизации h_x . Следовательно, степень аппроксимации разностной схемы (3.7) будет выше, чем схемы (3.2), а именно:

$$\left\| \delta f_h \right\|_{F_h} = O(h_x^2, h_t).$$

3.3 Устойчивость простейшей неявной разностной схемы

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\left\| u_h \right\|_{U_h} \leq C \left\| f_h \right\|_{F_h}$, где C — константа

Зададим возмущение разностной схеме (3.7):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2} + \varphi_i^k, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_1^k - \frac{1}{h_t} u_0^{k-1} = \alpha^k, & k = \overline{1, K}; \\ \left(2H \frac{D}{h_x} + 2 \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - 2 \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k - \frac{1}{h_t} u_I^{k-1} = \beta^k, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, явно полученного с помощью метода прогонки.

Проверим выполнение второго условия устойчивости. Для этого сначала определим нормы:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{\substack{i=\overline{0, I} \\ k=\overline{0, K}}} |u_i^k|; \quad (3.10)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_{\substack{i=\overline{1, I-1} \\ k=\overline{0, K}}} |\varphi_i^k| + \max_{i=\overline{0, I}} |\psi_i| + \max_{k=\overline{1, K}} |\alpha^k| + \max_{k=\overline{1, K}} |\beta^k|. \quad (3.11)$$

Рассмотрим первое дифференциальное уравнение разностной схемы с возмущением. Домножим его на h_t и введем $\gamma = \frac{Dh_t}{h_x^2} > 0$. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$u_i^k (1 + 2\gamma) = u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^k + \gamma u_{i-1}^k + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|u_i^k| (1 + 2\gamma) \leq |u_i^{k-1}| + \gamma (|u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + |\varphi_i^k| h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (3.12)$$

Определим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\varphi_i^k| &\leq \|f_h\|_{F_h}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}; \\ |u_i^k| &\leq \max_{j=\overline{0, I}} |u_j^k|, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Воспользуемся данными оценками в неравенстве (3.12):

$$|u_i^k|(1+2\gamma) \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i , то оно справедливо для любых левых частей по i , в том числе и максимальной. Следовательно, получаем следующее неравенство:

$$\max_{j=1, I-1} |u_j^k|(1+2\gamma) \leq \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим первое граничное условие. Также домножим его на h_t :

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_0^k = 2\gamma u_1^k + u_0^{k-1} + \alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника для того, чтобы оценить величину $|u_k^i|$:

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma |u_1^k| + |u_0^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Из определения (3.11) следует, что $|\alpha^k| \leq \|f_h\|$:

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma |u_1^k| + |u_0^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Воспользуемся оценками (3.13):

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Заменим $(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)$ на $(2\gamma + 1)$, так как $(2H\gamma h_x \geq 0)$:

$$(2\gamma + 1)|u_0^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.15)$$

Аналогичным образом из второго граничного условия

$$(2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_I^k = 2\gamma u_{I-1}^k + u_I^{k-1} + \beta^k h_t$$

можем получить следующее неравенство:

$$(2\gamma + 1)|u_I^k| \leq 2\gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.16)$$

Объединив неравенства (3.14), (3.15) и (3.16), получим следующее:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| (1 + 2\gamma) \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + 2\gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \quad (3.17)$$

Рассмотрим финальное неравенство (3.17) при различных значениях $k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned} k = 1: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^1| \leq \max_{j=0,I} |u_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\ k = 2: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^2| \leq \max_{j=0,I} |u_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\ & \dots \\ k = K: \quad & \max_{j=0,I} |u_j^K| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = \\ & = (1 + T) \|f_h\|_{F_h} = C \|f_h\|_{F_h}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где $C = 1 + T$.

Таким образом, схема (3.7) является безусловно устойчивой.

3.4 Метод прогонки для простейшей неявной разностной схемы

Приведем неявную разностную схему повышенного порядка аппроксимации (3.7) к виду, удобному для вычислений.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\gamma u_{i-1}^k + (2\gamma + 1)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = u_i^{k-1}, & i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, & i = \overline{0, I}; \\ (2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_0^k - 2\gamma u_1^k = u_0^{k-1}, & k = \overline{1, K}; \\ -2\gamma u_{I-1}^k + (2H\gamma h_x + 2\gamma + 1)u_I^k = u_I^{k-1}, & k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Заметим, что нахождение значений сеточной функции очередного временного слоя эквивалентно решению СЛАУ с матрицей следующего трехдиагонального вида:

$$A \begin{pmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_I^k \end{pmatrix} = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 & -2\gamma & & & 0 \\ & -\gamma & 2\gamma + 1 & -\gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma & 2\gamma + 1 & -\gamma \\ 0 & & & & -2\gamma & 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} u_0^{k-1} \\ \vdots \\ u_I^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания, так как:

$$\begin{aligned} |2H\gamma h_x + 2\gamma + 1| &> |2\gamma|, \\ |2\gamma + 1| &> |-\gamma| + |-\gamma|. \end{aligned}$$

Таким образом, получившееся СЛАУ можно решать методом прогонки. В терминах метода прогонки задача формулируется как:

$$A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i,$$

$$\begin{aligned} i = 0: \quad & A_i = 0, \quad B_i = 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1, \quad C_i = -2\gamma, \quad D_i = u_i^{k-1}, \\ i = \overline{1, I-1}: \quad & A_i = -\gamma, \quad B_i = 2\gamma + 1, \quad C_i = -\gamma, \quad D_i = u_i^{k-1}, \\ i = I: \quad & A_i = -2\gamma, \quad B_i = 2H\gamma h_x + 2\gamma + 1, \quad C_i = 0, \quad D_i = u_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Совершая прямой проход, потребуем, чтобы $A'_i = 0$ и $B'_i = 1$:

$$u_i^k + C'_i u_{i+1}^k = D'_i,$$

$$i = 0: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i}, \quad D'_i = \frac{D_i}{B_i},$$

$$i = \overline{1, I}: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}}, \quad D'_i = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}.$$

Это позволяет нам выразить искомые неизвестные в процессе обратного прохода:

$$i = \overline{0, I-1}: \quad u_i^k = D'_i - C'_i u_{i+1}^k,$$

$$i = I: \quad u_i^k = D'_i.$$

Таким образом, весь метод прогонки можно выразить как:

$$i = 0: \quad u_i^k = \frac{D_i}{B_i} - \frac{C_i}{B_i} u_{i+1}^k,$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad u_i^k = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}} - \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}} u_{i+1}^k,$$

$$i = I: \quad u_i^k = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}.$$

Или, если вернуться к исходным обозначениям:

$$i = 0: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + 2\gamma u_{i+1}^k}{2H\gamma h_x + 2\gamma + 1},$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + \gamma D'_{i-1} + \gamma u_{i+1}^k}{2\gamma + 1 + \gamma C'_{i-1}},$$

$$i = I: \quad u_i^k = \frac{u_i^{k-1} + 2\gamma D'_{i-1}}{2H\gamma h_x + 2\gamma + 1 + 2\gamma C'_{i-1}}.$$

3.5 Исследование сходимости простейшей неявной разностной схемы

Выше было доказано, что:

- простейшая неявная разностная схема (3.7) аппроксимирует решение краевой задачи (1.3) с порядками аппроксимации $O(h_x^2, h_t)$.
- схема (3.7) является абсолютно устойчивой.

Отсюда следует, что схема (3.7) сходится к решению краевой задачи (1.3), причем скорость сходимости является линейной по h_x и квадратичной по h_t .

4 Разностная схема Кранка-Николсон (Гринина В.С.)

4.1 Построение разностной схемы Кранка-Николсон

Equation Chapter (Next) Section 1 Для построения схемы Кранка-Николсон заменим область непрерывного изменения аргументов функции $u(x, t)$ равномерной сеткой (2.1).

Взяв шеститочечный шаблон, рассмотрим наряду с основными узлами сетки вспомогательный узел $\left(x_i, t_k + \frac{h_t}{2}\right)$. Используя этот узел, запишем дифференциальные уравнения простейших явной и неявной схем:

$$\frac{u_i^{k+\frac{1}{2}} - u_i^k}{h_t / 2} = D \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h_x^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k+\frac{1}{2}}}{h_t / 2} = D \frac{u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1}}{h_x^2}. \quad (4.2)$$

Умножим оба уравнения на $\frac{1}{2}$ и сложим их, также допишем начальное и граничные условия повышенного порядка аппроксимации. Получим разностную схему Кранка-Николсон:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{h_t} = \frac{1}{2} D \frac{(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + (u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1})}{h_x^2}, \quad i = \overline{0, I}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h_x} - Hu_0^k = 0, \quad k = \overline{1, K}; \\ \frac{u_{I+1}^k - u_{I-1}^k}{2h_x} + Hu_I^k = 0, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

4.2 Аппроксимация разностной схемы Кранка-Николсон

Невязка для этой схемы будет иметь структуру, аналогичную структурам невязок для предыдущих схем.

Аналогично неявной схеме с повышенной точностью аппроксимации, вторая, третья и четвертая невязки будут:

$$\left\{ \delta f_h^2 \right\}_{x=x_i}^{t=t_0} = 0;$$

$$\left\{ \delta f_h^3 \right\}_{x=x_0}^{t=t_k} = O(h_x^2);$$

$$\left\{ \delta f_h^4 \right\}_{x=x_l}^{t=t_k} = O(h_x^2).$$

Рассмотрим первую невязку:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \delta f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \left\{ L_h^1[u]_h - f_h^1 \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{h_t} - \frac{D}{2} \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k))}{h_x^2} - \\
& - \frac{D}{2} \frac{u(x_{i+1}, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_{k+1}) + u(x_{i-1}, t_{k+1}))}{h_x^2} = \\
& = \left\{ \frac{1}{h_t} \left[u + u'_t h_t + \frac{u''_{tt} h_t^2}{2} + \frac{u'''_{ttt} h_t^3}{6} + O(h_t^4) \right] - \frac{D}{2h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - 2u + u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\
& - \left\{ \frac{D}{2h_x^2} \left[u + u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} + \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) - \right. \right. \\
& - \left. \left. 2u + u - u'_x h_x + \frac{u''_{xx} h_x^2}{2} - \frac{u'''_{xxx} h_x^3}{6} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^4}{24} + O(h_x^5) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}} = \\
& = \left\{ \left[u'_t + \frac{u''_{tt} h_t}{2} + \frac{u'''_{ttt} h_t^2}{6} + O(h_t^3) \right] - D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\
& - \left\{ D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Обратим внимание, что выражение можно упростить, воспользовавшись первым уравнением краевой задачи (1.3). Также разложим выражение в узле (x_i, t_{k+1}) в ряд относительно узла (x_i, t_k) .

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[u'_t + \frac{u''_t h_t}{2} + \frac{u'''_t h_t^2}{6} + O(h_t^3) \right] - D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\
& - \left\{ D \left[\frac{u''_{xx}}{2} + \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_{k+1}} = \\
& = \left\{ \frac{u'_t}{2} + \frac{u''_t h_t}{2} + \frac{u'''_t h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\
& - \left\{ \frac{D}{2} \left[u''_{xx} + u'''_{xxt} h_t + \frac{u''''_{xxt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k}.
\end{aligned}$$

Заметим, что первое уравнение краевой задачи (1.3) продолжит выполняться, если взять производную по t левой и правой частей:

$$u'_t = Du''_{xx} \Rightarrow u''_{tt} = Du'''_{xxt}.$$

Воспользовавшись обеими уравнениями, выражение можно упростить до:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{u'_t}{2} + \frac{u''_t h_t}{2} + \frac{u'''_t h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} - \\
& - \left\{ \frac{D}{2} \left[u''_{xx} + u'''_{xxt} h_t + \frac{u''''_{xxt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = \left\{ \frac{u'''_t h_t^2}{6} + O(h_t^3) - D \frac{u''''_{xxx} h_x^2}{24} + O(h_x^3) - \frac{D}{2} \left[\frac{u''''_{xxt} h_t^2}{2} + O(h_t^3) + O(h_x^2) \right] \right\}_{x=x_i}^{t=t_k} = \\
& = O(h_x^2, h_t^2).
\end{aligned}$$

Следовательно, порядок аппроксимации разностной схемы Кранка-Николсон квадратичный как относительно шага h_x , так и h_t .

4.3 Устойчивость разностной схемы Кранка-Николсон

Разностная схема устойчива, если существуют такие $h_0 > 0$ и $C > 0$, что для любых сеток мелкостью $h < h_0$ и любых возмущений $f_h \in F_h$ выполняются следующие условия:

1. Решение разностной схемы с возмущением существует и единственно;
2. $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где C — константа.

Зададим возмущение разностной схеме (4.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{h_t} = \frac{1}{2} D \frac{(u_{i+1}^{k-1} - 2u_i^{k-1} + u_{i-1}^{k-1}) + (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)}{h_x^2} + \varphi_i^k, \quad \begin{array}{l} i = \overline{1, I-1}, \\ k = \overline{1, K}; \end{array} \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ \left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - \frac{D}{h_x^2} u_1^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_1^{k-1} + \alpha^k, \quad k = \overline{1, K}; \\ \left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^k - \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_I^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_{I-1}^{k-1} + \beta^k, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Существование и единственность решения данной разностной схемы вытекает из существования и единственности решения, полученного с помощью метода прогонки.

Будем использовать уже введенные нормы (3.10) и (3.11). Рассмотрим первое уравнение возмущенной разностной схемы. Домножим его на h_t и

введем $\gamma = \frac{Dh_t}{h_x^2} > 0$:

$$u_i^k (1 + \gamma) = \frac{\gamma}{2} (u_{i+1}^{k-1} + u_{i-1}^{k-1} + u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + u_i^{k-1} (1 - \gamma) + \varphi_i^k h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|u_i^k|(1+\gamma) \leq \frac{\gamma}{2}(|u_{i+1}^{k-1}| + |u_{i-1}^{k-1}| + |u_{i+1}^k| + |u_{i-1}^k|) + |u_i^{k-1}||1-\gamma| + |\varphi_i^k| h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

И воспользуемся оценками (3.13):

$$|u_i^k|(1+\gamma) \leq \gamma \left(\max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \max_{j=0, I} |u_j^k| \right) + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}||1-\gamma| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad i = \overline{1, I-1}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит от i , то данное неравенство справедливо для любых i в его левой части, в том числе и для максимального:

$$\max_{i=1, I-1} |u_j^k|(1+\gamma) \leq \gamma \left(\max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \max_{j=0, I} |u_j^k| \right) + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}||1-\gamma| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Потребуем выполнения условия $(1-\gamma) \geq 0$. Тогда неравенство можно записать в следующем виде:

$$\max_{i=1, I-1} |u_j^k|(1+\gamma) \leq \gamma \max_{j=0, I} |u_j^k| + \max_{j=0, I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad k = \overline{1, K}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим первое граничное условие:

$$\left(H \frac{D}{h_x} + \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^k - \frac{D}{h_x^2} u_1^k = \left(-H \frac{D}{h_x} - \frac{D}{h_x^2} + \frac{1}{h_t} \right) u_0^{k-1} + \frac{D}{h_x^2} u_1^{k-1} + \alpha^k.$$

Домножим его на h_t :

$$(H\gamma h_x + \gamma + 1)u_0^k = \gamma u_1^k + (-H\gamma h_x - \gamma + 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1} + \alpha^k h_t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$(H\gamma h_x + \gamma + 1)|u_0^k| \leq \gamma |u_1^k| + |-H\gamma h_x - \gamma + 1| |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Усилим неравенство:

$$|u_0^k|(\gamma + 1) \leq \gamma |u_1^k| + |-H\gamma h_x - \gamma + 1| |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Потребуем выполнения условия $(1-\gamma-H\gamma h_x) \geq 0$. Тогда:

$$|u_0^k|(\gamma + 1) \leq \gamma |u_1^k| + (-H\gamma h_x - \gamma + 1) |u_0^{k-1}| + \gamma |u_1^{k-1}| + |\alpha^k| h_t.$$

Воспользуемся уже введенными оценками (3.13):

$$\begin{aligned}
|u_0^k|(\gamma + 1) &\leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + (-H\gamma h_x + 1) \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \\
|u_0^k|(\gamma + 1) &\leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Аналогично для второго граничного условия получим:

$$|u_I^k|(\gamma + 1) \leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t. \tag{4.6}$$

Объединим неравенства (4.4), (4.5) и (4.6):

$$\max_{i=0,I} |u_j^k| (1 + \gamma) \leq \gamma \max_{j=0,I} |u_j^k| + \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t, \quad k = \overline{1, K}.$$

Упростим полученное неравенство:

$$\max_{j=0,I} |u_j^k| \leq \max_{j=0,I} |u_j^{k-1}| + \|f_h\|_{F_h} h_t.$$

Рассмотрим последнее неравенство при различных значениях $k = \overline{1, K}$:

$$\begin{aligned}
k = 1: \quad \max_{j=0,I} |u_j^1| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^0| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\
k = 2: \quad \max_{j=0,I} |u_j^2| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^1| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + 2h_t) \|f_h\|_{F_h}; \\
&\dots \\
k = K: \quad \max_{j=0,I} |u_j^K| &\leq \max_{j=0,I} |u_j^{K-1}| + h_t \|f_h\|_{F_h} \leq (1 + Kh_t) \|f_h\|_{F_h} = \\
&= (1 + T) \|f_h\|_{F_h} = C \|f_h\|_{F_h}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}$, где $C = 1 + T$.

Таким образом, схема (н) является устойчивой при условии

$$(1 - \gamma - H\gamma h_x) \geq 0, \text{ где } \gamma = \frac{Dh_t}{h_x^2}.$$

4.4 Метод прогонки для разностной схемы Кранка-Николсон

Аналогично методу прогонки для простейшей неявной схемы, представим разностную схему (4.3) в виде, удобном для вычислений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma u_{i-1}^k + (2\gamma + 2)u_i^k - \gamma u_{i+1}^k = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1}, \quad i = \overline{1, I-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ u_i^0 = \psi_i, \quad i = \overline{0, I}; \\ (H\gamma h_x + \gamma + 1)u_0^k - \gamma u_1^k = -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1}, \quad k = \overline{1, K}; \\ -\gamma u_{I-1}^k + (H\gamma h_x + \gamma + 1)u_I^k = \gamma u_{I-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_I^{k-1}, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right.$$

Представим нахождение значений сеточной функции очередного временного слоя как решение СЛАУ:

$$A \begin{pmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_I^k \end{pmatrix} = b,$$

$$A = \begin{bmatrix} H\gamma h_x + \gamma + 1 & -\gamma & & & 0 \\ & -\gamma & 2\gamma + 2 & -\gamma & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\gamma & 2\gamma + 2 & -\gamma \\ 0 & & & & -\gamma & H\gamma h_x + \gamma + 1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_0^{k-1} + \gamma u_1^{k-1} \\ \gamma u_0^{k-1} - (2\gamma - 2)u_1^{k-1} + \gamma u_2^{k-1} \\ \vdots \\ \gamma u_{I-2}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_{I-1}^{k-1} + \gamma u_I^{k-1} \\ \gamma u_{I-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_I^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрица A обладает свойством строгого диагонального преобладания:

$$\begin{aligned} |H\gamma h_x + \gamma + 1| &> |-\gamma|, \\ |2\gamma + 2| &> |-\gamma| + |-\gamma|. \end{aligned}$$

Сформулируем задачу в терминах метода прогонки:

$$A_i u_{i-1}^k + B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k = D_i,$$

$$i = 0: \quad A_i = 0, \quad B_i = H\gamma h_x + \gamma + 1, \\ C_i = -\gamma, \quad D_i = -(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1},$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad A_i = -\gamma, \quad B_i = 2\gamma + 2, \\ C_i = -\gamma, \quad D_i = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1},$$

$$i = I: \quad A_i = -\gamma, \quad B_i = H\gamma h_x + \gamma + 1, \\ C_i = 0, \quad D_i = \gamma u_{i-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1}.$$

Совершая прямой проход, потребуем, чтобы $A'_i = 0$ и $B'_i = 1$:

$$u_i^k + C'_i u_{i+1}^k = D'_i,$$

$$i = 0: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i}, \quad D'_i = \frac{D_i}{B_i},$$

$$i = \overline{1, I}: \quad C'_i = \frac{C_i}{B_i - A_i C'_{i-1}}, \quad D'_i = \frac{D_i - A_i D'_{i-1}}{B_i - A_i C'_{i-1}}.$$

Аналогично простейшей неявной схеме, полное выражение метода прогонки будет выглядеть как:

$$i = 0: \quad u_i^k = \frac{-(H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1} + \gamma u_{i+1}^k}{H\gamma h_x + \gamma + 1},$$

$$i = \overline{1, I-1}: \quad u_i^k = \frac{\gamma u_{i-1}^{k-1} - (2\gamma - 2)u_i^{k-1} + \gamma u_{i+1}^{k-1} + \gamma D'_{i-1} + \gamma u_{i+1}^k}{2\gamma + 2 + \gamma C'_{i-1}},$$

$$i = I: \quad u_i^k = \frac{\gamma u_{i-1}^{k-1} - (H\gamma h_x + \gamma - 1)u_i^{k-1} + \gamma D'_{i-1}}{H\gamma h_x + \gamma + 1 + \gamma C'_{i-1}}.$$

4.5 Исследование сходимости схемы Кранка-Николсон

Выше было доказано, что:

- схема Кранка-Николсон (4.3) аппроксимирует решение краевой задачи (1.3) с порядками аппроксимации $O(h_x^2, h_t^2)$;

- схема (4.3) является условно устойчивой с условием $1 - \gamma - H\gamma h_x > 0$.

Отсюда следует, что схема (4.3) сходится к решению краевой задачи (1.3) при выполнении условия $1 - \gamma - H\gamma h_x > 0$, причем скорость сходимости является квадратичной как по h_x , так и по h_t .

5 Описание программы

6 Исследование погрешности с помощью вычислительного эксперимента

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы осуществлена постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности в круге. Для численного решения краевой задачи построены две разностные схемы: схема Кранка-Николсона и простейшая явная схема.

Проведено теоретическое исследование разностных схем, в результате которого установлено, что схема Кранка-Николсона аппроксимирует исходную краевую задачи со вторыми порядками относительно шагов сетки, а простейшая явная схема – с первыми порядками. Также в результате исследования установлено, что обе схемы являются условно устойчивыми, причем схема Кранка-Николсона оказалась значительно менее требовательной к мелкости сетки по переменной времени.

Для проверки фактической сходимости разностных схем был использован тестовый пример, предложенный преподавателем.

Высокоточное решение тестовой задачи получено методом разделения переменных в виде ряда Фурье-Бесселя. Для контроля погрешности аналитического решения использована оценка остатка ряда.

В результате серии вычислительных экспериментов установлено, что фактическая погрешность разностного решения, вычисляемого с помощью обеих схем, убывает с измельчением шагов сетки при соблюдении условий устойчивости. При этом порядки убывания погрешности численного решения оказались близкими к порядкам, полученным при теоретическом исследовании. Однако при нарушении условий устойчивости ситуация резко менялась: Схема Кранка-Николсона обнаруживала заметное замедление сходимости численного решения, а явная схема показывала расходимость.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов [Текст] / Владимиров В.С., Жаринов В.В. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 399 с.

2 Matplotlib: a plotting library for the Python programming language [Электронный ресурс] – 2018. – URL: <https://matplotlib.org/> (дата обращения: 22.12.2018).

3 SymPy: a Python library for symbolic mathematics. [Электронный ресурс] – 2018. – URL: <https://docs.sympy.org/latest/index.html> (дата обращения: 22.12.2018).

4 Бахвалов Н.С. Численные методы: учебное пособие для физ.-мат. специальностей вузов [Текст] / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Н.М. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2007. – 636 с.

5 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие для университетов [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОД ИНТЕРФЕЙСА ОКОННОГО ПРИЛОЖЕНИЯ