

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Исследование погрешности моделирования
распространения светового импульса
в планарном волноводе**

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата)

Студент _____	М.М. Иванов
<i>(подпись)</i>	
Руководитель ВКР, к.т.н., доцент _____	А.А. Дегтярев
<i>(подпись)</i>	
Нормоконтролёр _____	С.В. Суханов
<i>(подпись)</i>	

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____ В.А. Сойфер
« ____ » _____ 20 ____ г.

**ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
БАКАЛАВРА**

студенту группы 6409-010302D *Иванову Михаилу Михайловичу*

Тема работы *Исследование погрешности моделирования распространения светового импульса в планарном волноводе*

утверждена приказом по университету от «08» _____ 04 _____ 2018 г. № 474-ст

Исходные данные: *двумерное волновое уравнение, метод разделения переменных Фурье, признаки сходимости функциональных рядов, метод вычислительного эксперимента, метод конечных разностей.*

Структурные части работы:

- *получение решения краевой задачи для волнового уравнения в виде бесконечного ряда Фурье при различных способах описания входного импульса;*
- *получение оценки остатка ряда Фурье;*
- *разработка программного средства для численного моделирования и исследования погрешности;*
- *обеспечение контроля погрешности решения волнового уравнения;*

- разработка программы разностного решения волнового уравнения и использование программного средства численного моделирования с помощью рядов Фурье для тестирования программы разностного решения.

Научный руководитель
доцент каф. технической
кибернетики, к.т.н., доцент

_____ А.А. Дегтярев
(подпись)
« 15 » 02 2018 г.

Задание принял к исполнению

_____ М.М. Иванов
(подпись)
« 15 » 02 2018 г.

Примечание: Задание в данном случае печатается с двух сторон одного листа, все подписи будут находиться на одном листе. Задание располагается за Титульным листом, считается вторым листом в ВКР, номер страницы на нем не ставится.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа бакалавра: 63 с., 16 рисунков, 6 таблиц, 10 источников, одно приложение.

Презентация: 12 слайдов Microsoft PowerPoint.

ДВУМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, РЯД ФУРЬЕ, ОСТАТОК РЯДА, ПОГРЕШНОСТЬ РЕШЕНИЯ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, ЯВНАЯ СХЕМА

Работа посвящена исследованию погрешности численного моделирования процесса распространения электромагнитного импульса в однородном планарном волноводе.

Значительная часть работы уделена нахождению аналитического решения для двух способов описания входного импульса, а также теоретическому и экспериментальному исследованию оценки остатка ряда.

Часть работы связана с построением разностной схемы и исследованием погрешности численного решения с помощью вычислительного эксперимента.

В работе приведены результаты численного моделирования процесса распространения импульса в планарном волноводе.

Установлен факт существенного преимущества одного способа задания входного импульса над другим.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Постановка задачи и цель работы.....	7
2 Аналитическое решение краевой задачи	10
2.1 Решение для случая, когда входной импульс описывается кусочно-гладкой функцией	10
2.2 Решение для случая, когда входной импульс описывается гладкой функцией.....	15
3 Исследование погрешности приближенно-аналитического решения	20
3.1 Оценка остатка ряда Фурье	20
3.1.1 Оценка для случая, когда входной импульс описывается кусочно-гладкой функцией.....	20
3.1.2 Оценка для случая, когда входной импульс описывается гладкой функцией	23
3.2 Экспериментальное исследование качества оценки остатка ряда	27
4 Решение краевой задачи методом конечных разностей.....	31
4.1 Построение разностной схемы	31
4.2 Исследование погрешности разностного решения.....	35
5 Сравнение решений при различных способах задания входного импульса по критерию вычислительной трудоемкости	39
6 Описание программы	41
Заключение.....	45
Список использованных источников	46
Приложение А Моделирование распространения импульса в среде с переменным коэффициентом преломления.....	47
Приложение Б Фрагменты кода программы	53
Б.1 Функция построения аналитического решения для кусочно-гладкого импульса	53
Б.2 Функция построения численного решения	58

ВВЕДЕНИЕ

Задачи моделирования процессов распространения электромагнитных импульсов в пространстве и волноводах актуальны в настоящее время в связи с широким применением различных оптических устройств [1, 2]. Довольно часто методы решения таких задач основаны на применении разностных схем. При этом отладка численных алгоритмов ведется на сериях тестовых примеров, допускающих высокоточные решения. Сравнивая численное решение с тестовым примером можно ответить на вопросы величины погрешности разностного метода, его скорости сходимости с измельчением шагов дискретизации.

Для моделирования процессов распространения электромагнитного излучения используются различные математические описания. Одним из наиболее распространенных способов описания электромагнитного поля является волновое уравнение [1].

В настоящей работе решается задача создания программного средства, позволяющего рассчитывать решение конкретной тестовой задачи и обеспечивать при этом контроль вычислительной погрешности.

Данная работа содержит шесть разделов.

В первом разделе рассматривается постановка задачи, определяются начальные и краевые условия.

Во втором разделе осуществляется аналитическое решение поставленной задачи для волнового уравнения в виде бесконечного ряда Фурье при двух способах описания входного импульса.

В третьем разделе проводится исследование погрешности приближенно-аналитического решения, осуществляется оценка остатка ряда, а также экспериментальное исследование ее качества.

В четвертом разделе приведено численное решение поставленной задачи с помощью явной конечно-разностной схемы [3, 4]. Проводится исследование погрешности разностного решения. В конце раздела приведены результаты

численного моделирования распространения импульса в среде с переменным коэффициентом преломления.

В пятом разделе проводится сравнение полученных решений для двух способов задания входного импульса по критерию вычислительной трудоемкости.

И, наконец, в шестом разделе приведено описание программы, при помощи которой производится расчет решений и исследование их погрешности.

Данная работа имеет практическую ценность, поскольку помимо результатов, полученных в ходе исследований, содержит программное средство, позволяющее проводить расчеты при различных входных параметрах.

1 Постановка задачи и цель работы

Предположим, что на вход $z=0$ планарного волновода подается электромагнитный импульс заданной формы. Схематическое изображение фрагмента волновода представлено на рисунке 1.1. Предполагается, что волновод характеризуется толщиной l_x и длиной l_z , а по оси y является неограниченным.

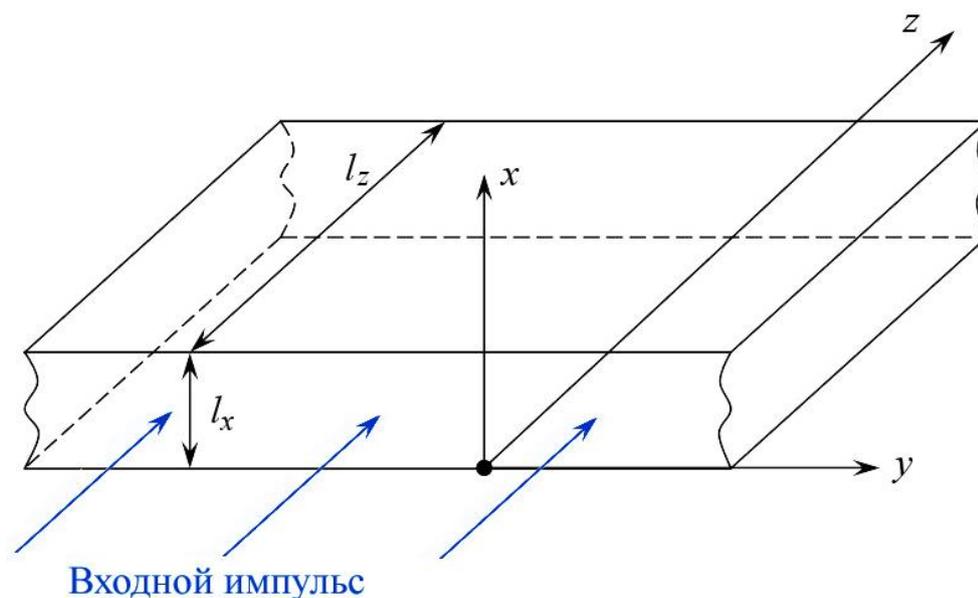


Рисунок 1.1 – Изображение фрагмента волновода

В настоящей работе рассматривается случай TE – поляризации электромагнитного поля, то есть напряженности электрического и магнитного полей имеют вид [5]:

$$\vec{E} = (0, E_y, 0), \vec{H} = (H_x, 0, H_z),$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{H} – напряженность магнитного поля.

В этом случае процесс распространения электромагнитной волны может быть описан уравнением [6]:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \times \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2},$$

где $\varepsilon = n^2$ – диэлектрическая проницаемость среды, которая предполагается постоянной, c – скорость распространения импульса в среде, n – показатель преломления среды.

Уравнения для компонент H_x и H_z напряженности магнитного поля записываются аналогичным образом.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ среда находилась в невозмущенном состоянии, то есть

$$E_y|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 < z \leq l_z.$$

Предполагая, что стенки $x = 0$ и $x = l_x$ имеют металлизированное покрытие, запишем граничные условия в следующем виде:

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad E_y|_{x=l_x} = 0, \quad 0 < z \leq l_z, \quad 0 < t \leq T.$$

На вход волновода $z = 0$ подается импульс, описываемый функцией

$$E_y|_{z=0} = \gamma(t)\Psi(x,t),$$

где $\gamma(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t^* \\ 0, & t^* < t \leq T \end{cases}$ – ступенчатая функция, t^* – длительность им-

пульса, $\Psi(x,t)$ – функция, описывающая форму импульса.

Для ограничения расчетной области воспользуемся граничным условием при $z = l_z$:

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{z=l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Соединяя все соотношения в единое целое, получаем следующую математическую модель процесса распространения импульса в однородной среде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c^2} \times \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq z \leq l_z, 0 \leq t \leq T; \\ E_y|_{x=0} = 0, \quad E_y|_{x=l_x} = 0, \quad 0 < z \leq l_z, 0 < t \leq T; \\ E_y|_{z=0} = \gamma(t)\Psi(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq T; \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq T; \\ E_y|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 < z \leq l_z. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Целью данной работы является разработка программного средства для численного моделирования распространения импульса в планарном однородном волноводе при обеспечении контроля вычислительной погрешности.

Для достижения поставленной цели были реализованы следующие этапы:

- получение решения краевой задачи для волнового уравнения в виде бесконечного ряда Фурье при различных способах описания входного импульса;
- получение оценки остатка ряда Фурье;
- разработка программного средства для численного моделирования и исследования погрешности;
- обеспечение контроля погрешности решения волнового уравнения;
- разработка программы разностного решения волнового уравнения и использование программного средства численного моделирования с помощью рядов Фурье для тестирования программы разностного решения.

2 Аналитическое решение краевой задачи

2.1 Решение для случая, когда входной импульс описывается кусочно-гладкой функцией

Рассмотрим случай, когда функция $\Psi(x,t)$ имеет вид:

$$\Psi(x,t) = \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t),$$

и, следовательно, входной импульс определяется следующей функцией

$$E_y|_{z=0} = \gamma(t) \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t), \quad (2.1)$$

где $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, λ – длина волны.

Импульс, который описывается функцией (2.1), изображен на рисунке 2.1.

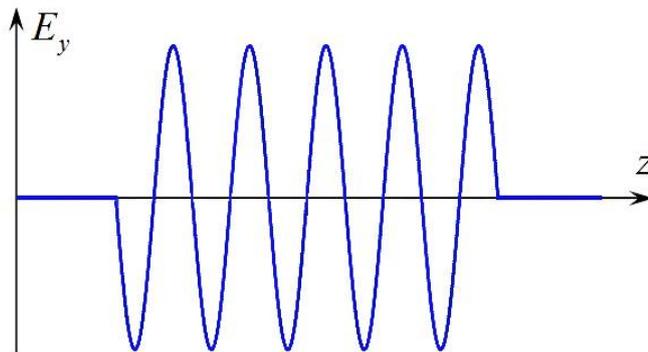


Рисунок 2.1 – Импульс, описываемый кусочно-гладкой функцией

Легко заметить, что в начале и конце импульса имеется слабый разрыв (излом графика).

Поскольку в краевом условии (2.1) есть ступенчатая функция $\gamma(t)$, для удобства решения разобьем исходную задачу на две подзадачи: для временного промежутка $0 \leq t \leq t^*$ и для временного промежутка $t^* < t \leq T$.

Математическая модель первой подзадачи (для временного промежутка $0 \leq t \leq t^*$) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c^2} \times \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq z \leq l_z, 0 \leq t \leq t^*; \\ E_y|_{x=0} = 0, \quad E_y|_{x=l_x} = 0, \quad 0 < z \leq l_z, 0 < t \leq t^*; \\ E_y|_{z=0} = \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t), \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq t^*; \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{z=l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq t^*; \\ E_y|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 < z \leq l_z. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Для решения задачи (2.2) методом разделения переменных [6, 7] сделаем замену:

$$E_y = \tilde{E}_y + \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t),$$

в результате чего будем иметь однородные граничные условия.

Получим новую краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{c^2} \times \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial z^2} + U(x, t), \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq z \leq l_z, 0 \leq t \leq t^*; \\ \tilde{E}_y|_{x=0} = 0, \quad \tilde{E}_y|_{x=l_x} = 0, \quad 0 < z \leq l_z, 0 < t \leq t^*; \\ \tilde{E}_y|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \Big|_{z=l_z} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq t \leq t^*; \\ \tilde{E}_y|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 < z \leq l_z; \\ \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq l_x, 0 < z \leq l_z, \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\text{где } U(x, t) = a^2 \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t), \quad a^2 = \frac{\varepsilon}{c^2} \omega^2 - \frac{\pi^2}{l_x^2}, \quad \Phi(x) = -\omega \sin \frac{\pi x}{l_x}.$$

- разрыв (конец фрагмента) -

3 Исследование погрешности приближенно-аналитического решения

3.1 Оценка остатка ряда Фурье

Итак, было получено решение в виде ряда Фурье для каждой из подзадач (2.2), (2.4), (2.29) и (2.31):

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} e_m(x, z, t).$$

Невозможно просуммировать бесконечное количество слагаемых, но можно посчитать значение частичной суммы M слагаемых для фиксированных значений x, z, t :

$$E_M = \sum_{m=1}^M e_m(x, z, t).$$

Таким образом, выдавая численное значение напряженности в каждой точке, мы будем ошибаться на величину, равную модулю хвоста ряда, начиная с $(M + 1)$ - элемента:

$$\delta_{\text{факт}} = |R_M| = \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} e_m(x, z, t) \right|,$$

где $\delta_{\text{факт}}$ – это фактическая погрешность решения, R_M – остаток ряда.

Для того, чтобы контролировать эту погрешность, оценим сверху модуль остатка ряда [10] для каждого из двух способов задания входного импульса.

3.1.1 Оценка для случая, когда входной импульс описывается кусочно-гладкой функцией

Рассмотрим ряд, полученный для временного промежутка $0 \leq t \leq t^*$:

$$E_y(x, z, t) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_m \pi (1+2m)} \left(1 - \cos \frac{\pi(1+2m)}{2} \right) \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin \frac{\pi(1+2m)z}{2l_z} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{b^2}{\omega_m^2 - \omega^2} (\omega_m \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_m t)) - \omega \sin(\omega_m t) \right) \right] + \sin \frac{\pi x}{l_x} \sin(\omega t).$$

- разрыв (конец фрагмента) -

4 Решение краевой задачи методом конечных разностей

4.1 Построение разностной схемы

Для построения аппроксимирующей явной конечно-разностной схемы был выбран метод замены производных разностными отношениями [3].

Заменим область непрерывного изменения переменных x , z , t равномерной сеткой (множеством узлов (x_i, z_j, t_k)):

$$\begin{aligned}x_i &= ih_x, \quad i = \overline{0, I}, \quad h_x = \frac{l_x}{I}; \\z_j &= jh_z, \quad j = \overline{0, J}, \quad h_z = \frac{l_z}{J}; \\t_k &= kh_t, \quad k = \overline{0, K}, \quad h_t = \frac{T}{K},\end{aligned}$$

где i - номер узла разбиения по толщине, j - номер узла разбиения по длине, k - номер узла разбиения по времени, I - число интервалов разбиения по толщине, J - число интервалов разбиения по длине, K - число интервалов разбиения по времени, h_x - шаг разбиения по толщине, h_z - шаг разбиения по длине, h_t - шаг разбиения по времени.

Для удобства записи обозначим E_y через E . Запишем приближенные выражения для производных, входящих в краевую задачу (1.1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &\approx \frac{E(x_i, z_j, t_{k-1}) - 2E(x_i, z_j, t_k) + E(x_i, z_j, t_{k+1}))}{h_t^2}; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &\approx \frac{E(x_{i-1}, z_j, t_k) - 2E(x_i, z_j, t_k) + E(x_{i+1}, z_j, t_k))}{h_x^2}; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &\approx \frac{E(x_i, z_{j-1}, t_k) - 2E(x_i, z_j, t_k) + E(x_i, z_{j+1}, t_k))}{h_z^2}; \\ \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=l_z} &\approx \frac{E(x_i, z_{J+1}, t_k) - E(x_i, z_{J-1}, t_k))}{2h_z}; \quad \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} \approx \frac{E(x_i, z_j, t_1) - E(x_i, z_j, t_0))}{h_t}.\end{aligned}$$

- разрыв (конец фрагмента) -

5 Сравнение решений при различных способах задания входного импульса по критерию вычислительной трудоемкости

Проведем сравнение полученных решений при различных способах задания входного импульса (кусочно-гладкой и гладкой функцией) по критерию вычислительной трудоемкости. Под вычислительной трудоемкостью будем понимать количество времени, затрачиваемого на построение решения в виде двумерного графика зависимости E_y от z при следующих зафиксированных значениях параметров: $l_x = 10$ мкм; $l_z = 12$ мкм; $\varepsilon = 1$; $\lambda = 1$ мкм; $t^* = 5$ мкм; $x = 5$ мкм.

Сначала сравним решения, полученные в виде рядов Фурье. Зафиксируем: $\rho = 5$ мкм; $\delta_1 = 0,1\delta$; $\delta_2 = 0,9\delta$. В таблицах 5.1 и 5.2 показаны результаты для различных значений δ .

Таблица 5.1 – Сравнение с учетом фронтального участка

δ		0,01	0,001	0,0001	0,00001
Количество слагаемых M_{Π}	Кусочно-гладкий импульс	826	8259	82589	825884
	Гладкий импульс	34	44	102	215
	Разница (во сколько раз)	24,3	187,7	809,7	3841,3
Время выполнения, мс	Кусочно-гладкий импульс	112	1112	43760	520052
	Гладкий импульс	10	12	25	50
	Разница (во сколько раз)	11,2	92,7	1750,4	10401

Таблица 5.2 – Сравнение без учета фронтального участка (вырезается 1/5 часть длины волны в зоне волнового фронта)

δ		0,01	0,001	0,0001	0,00001
Количество слагаемых M_{Π}	Кусочно-гладкий импульс	44	135	365	479
	Гладкий импульс	34	44	53	133
	Разница (во сколько раз)	1,3	3,1	6,9	3,6
Время выполнения, мс	Кусочно-гладкий импульс	10	20	51	66
	Гладкий импульс	10	12	14	32
	Разница (во сколько раз)	1	1,6	3,6	2,1

- разрыв (конец фрагмента) -

6 Описание программы

Для моделирования распространения электромагнитного импульса и исследования погрешности была написана компьютерная программа на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2013.

Программа позволяет визуализировать результаты аналитического и численного решения поставленной задачи, оценивать количество слагаемых для контроля погрешности усечения ряда, исследовать погрешность и сходимость сеточного решения к точному, а также моделировать распространение импульса в неоднородной среде.

При запуске программы появляется окно, показанное на рисунке 6.1. Оно состоит из секции ввода общих параметров, секции выбора типа входного импульса, двух кнопок (задание параметров по умолчанию и сохранение введенных значений) и секции, которая состоит из четырех вкладок, реализующих различные функции.

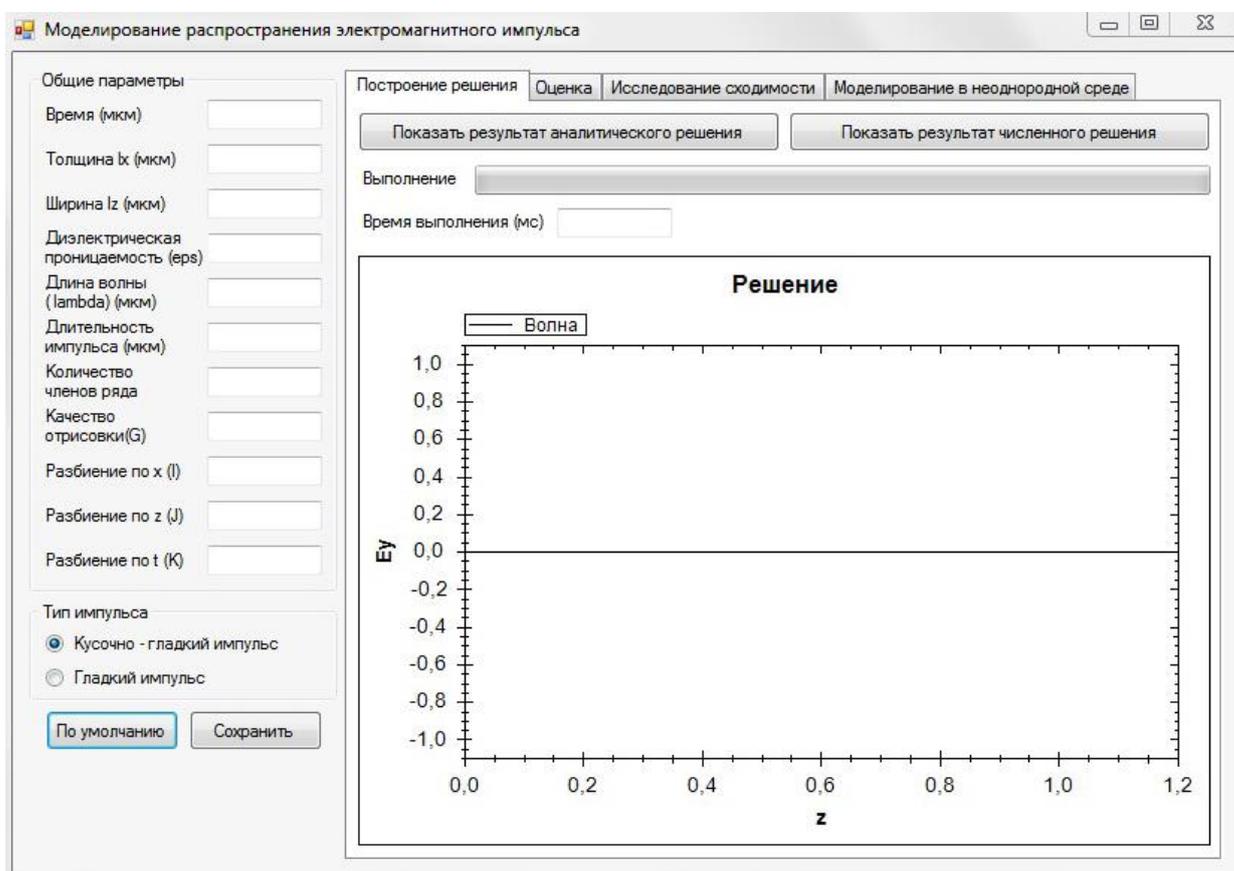


Рисунок 6.1 – Интерфейс программы

Во всех вкладках есть индикатор процесса, который показывает процент выполнения расчета. После окончания в поле «Время выполнения» появляется затраченное время в миллисекундах.

Первая вкладка «Построение решения» предназначена для построения двумерных графиков, визуализирующих решение аналитическим и численным методом. Интерфейс программы с открытой вкладкой «Построение решения» показан на рисунке 6.2.

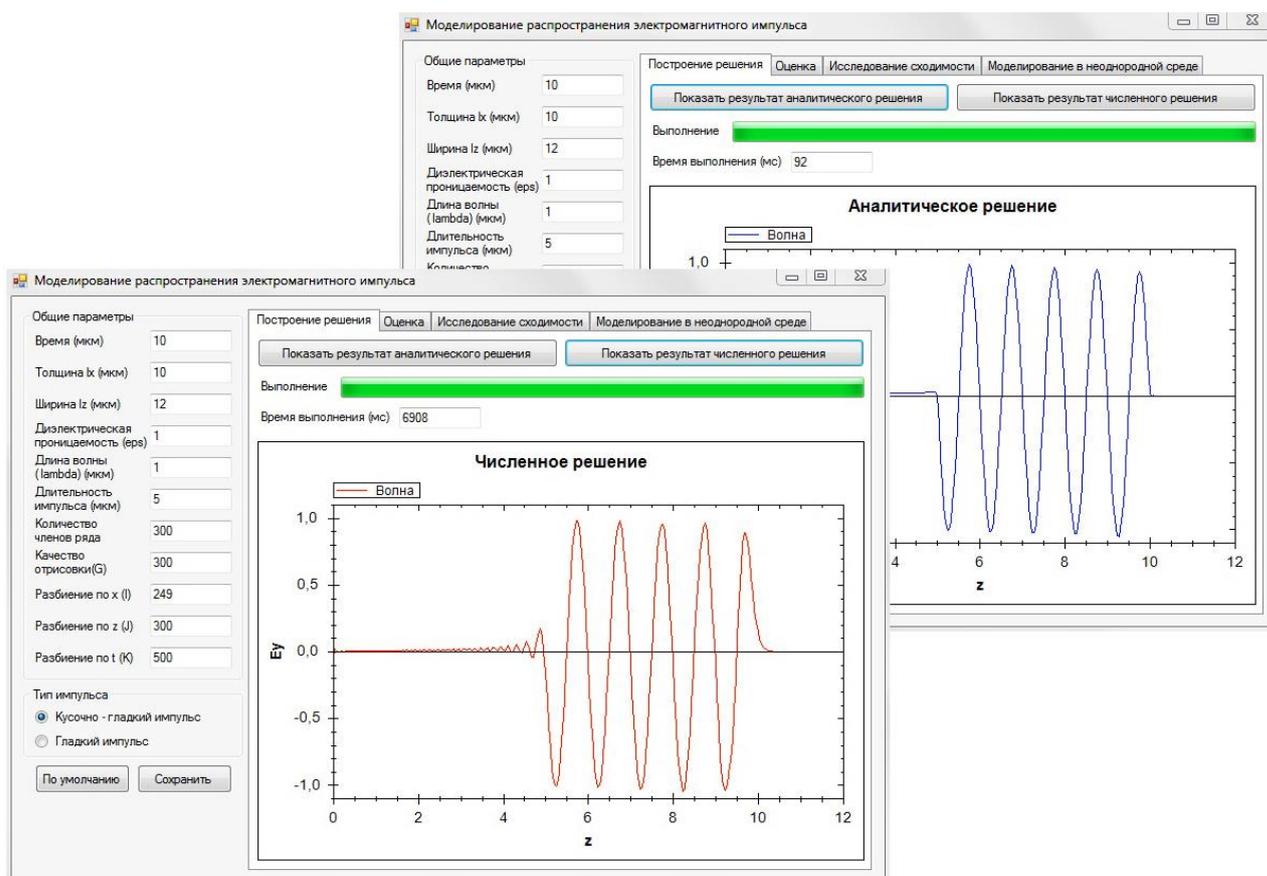


Рисунок 6.2 – Интерфейс программы с открытой вкладкой «Построение решения»

Вторая вкладка «Оценка» предназначена для нахождения количества слагаемых, гарантирующего требуемую точность, с помощью теоретической оценки и экспериментальным путем. Интерфейс программы с открытой вкладкой «Оценка» показан на рисунке 6.3.

- разрыв (конец фрагмента) -

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы было проведено исследование погрешности моделирования распространения электромагнитного импульса в планарном волноводе.

С помощью метода разделения переменных найдено решение краевой задачи в виде бесконечных рядов Фурье для двух способов описания входного импульса.

Для контроля погрешности усечения ряда была получена оценка его остатка. Было установлено, что получаемое количество суммируемых элементов при заданной точности является существенно избыточным. Поэтому была предложена методика экспериментального определения количества суммируемых членов ряда, которая позволяет уменьшить это количество для кусочно-гладкого импульса минимум в пять раз (а при отсечении фронтального участка в 11000 раз), для гладкого – в 350–2400 раз, и при этом гарантировать обеспечение требуемой точности.

Также было получено численное решение поставленной задачи с помощью метода конечных разностей. Проведено исследование погрешности разностного решения, в результате которого было замечено, что при использовании способа описания входного импульса кусочно-гладкой функцией скорость сходимости разностной схемы гораздо меньше, чем при использовании способа описания импульса гладкой функцией.

Разработана программа для численного моделирования процесса распространения электромагнитного импульса на основе полученных решений в однородной среде и при размещении в волноводе оптического клина.

Проведено сравнение полученных решений для двух способов задания входного импульса по критерию вычислительной трудоемкости. Установлено, что описание входного импульса гладкой функцией дает экономию по времени построения решения в 3060 раз при использовании аналитического метода решения и в 190 раз при использовании разностного метода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Козлова, Е.С. Моделирование распространения короткого двумерного импульса света [Текст] / Е.С. Козлова, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2012. – Т.36, №2. – С. 158-164.
- 2 Козлова, Е.С. Моделирование предвестников Зоммерфельда и Бриллюэна в среде с частотной дисперсией на основе разностного решения волнового уравнения [Текст] / Е.С. Козлова, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2013. – Т.37, №2. – С. 146-154.
- 3 Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст]: учеб. пособие / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- 4 Самарский, А.А. Введение в численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
- 5 Евтихов, М.Г. Соотношения Снеллиуса и Френеля для электромагнитных волн с постоянной линейной поляризацией [Текст] // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т.55, №8. – С. 915-922.
- 6 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
- 7 Зайцев, В.Ф. Метод разделения переменных в математической физике [Текст]: учеб. пособие / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – СПб.: Книжный Дом, 2009. – 92 с.
- 8 Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.
- 9 Волков, И.К. Случайные процессы [Текст]: учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. – 448 с.
- 10 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст]: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 3. – 662 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Моделирование распространения импульса в среде с переменным коэффициентом преломления

Предположим, что на пути распространения импульса размещен оптический клин из материала, имеющего более высокий коэффициент преломления. Схематическое изображение такого волновода показано на рисунке А.1.

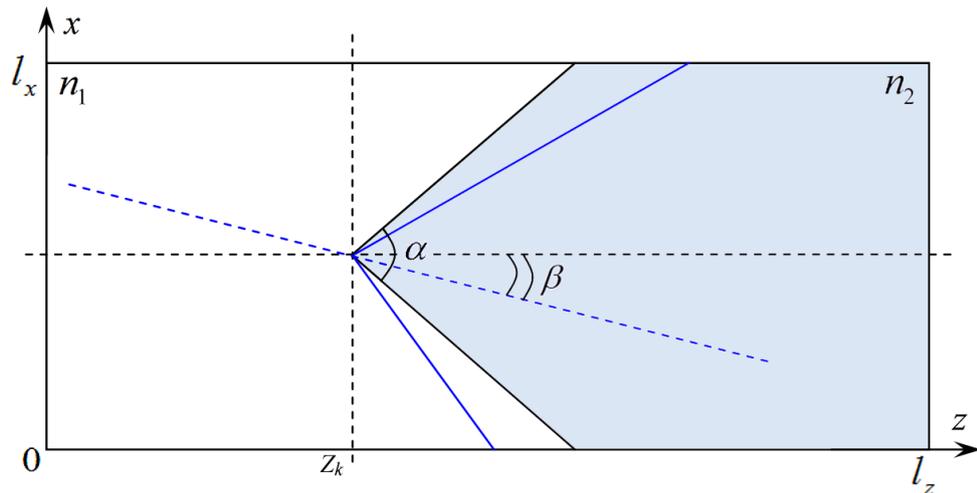


Рисунок А.1 – Изображение волновода с клином

Зафиксируем следующие значения параметров: $l_x = 10 \text{ мкм}$; $l_z = 12 \text{ мкм}$; $n_1 = 1$; $n_2 = 1,5$; $\lambda = 1 \text{ мкм}$; $t^* = 5 \text{ мкм}$; $I = 250$; $J = 300$; $K = 500$; $z_k = 6 \text{ мкм}$.

Разработанная и отгестированная программа была применена для расчета процесса прохождения импульса через такой клин.

На рисунке А.2 приведен результат для угла клина $\alpha = 90^\circ$ и угла поворота $\beta = 0^\circ$. Наблюдается интерференционная картина вследствие искажения импульса при прохождении через клин. Длина волны внутри клина уменьшается, а амплитуда колебаний увеличивается, особенно в центральной зоне, что соответствует физике процесса. Это связано с более высоким показателем преломления внутри клина и с его формой. Видим эффект интерференции падающей и отраженной от клина волн. А также можно заметить, что отраженная от клина волна приобретает сферическую форму.

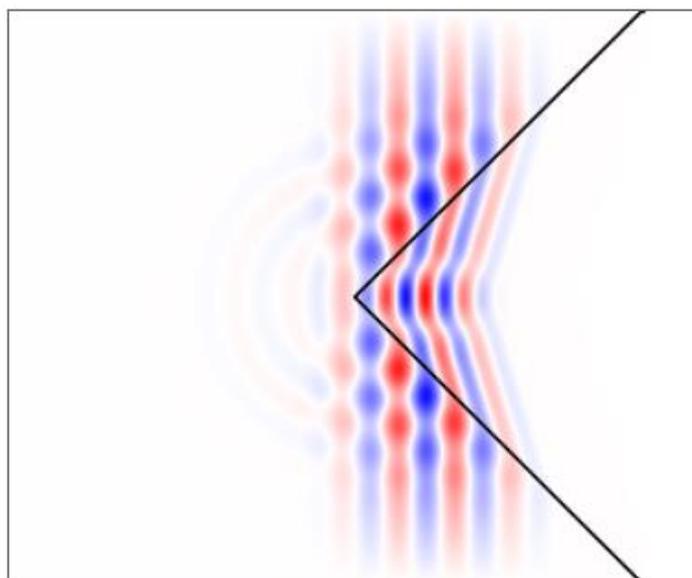


Рисунок А.2 – Моделирование гладкого импульса (глубина вхождения 10 мкм)

Проведем сравнение разностных решений для каждого случая. Зафиксируем: $\delta = 2$ мкм; $M = 450$. задавая уровень погрешности σ , будем изменять сетку таким образом, чтобы схема была устойчивой и фактическая погрешность практически совпадала с σ . Результаты приведены в таблице А.1.

Таблица А.1 – Сравнение разностных решений

σ		0,02	0,01	0,004
Количество узлов сетки	Кусочно-гладкий импульс	4090601	64682001	1029287201
	Гладкий импульс	17576	262701	4090601
	Разница (во сколько раз)	232,7	246,2	251,6
Время выполнения, мс	Кусочно-гладкий импульс	761	12107	135537
	Гладкий импульс	5	50	766
	Разница (во сколько раз)	152,2	242,1	176,9

Из таблицы А.1 видим, что при использовании разностного метода решения моделирование гладкого импульса дает экономию по количеству узлов и по времени построения в среднем в 190-240 раз.

Таким образом, можно сделать вывод, что описание входного импульса гладкой функцией дает существенную экономию по вычислительной трудоемкости при любом методе решения краевой задачи.

- разрыв (конец фрагмента) -

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Фрагменты кода программы

Б.1 Функция построения аналитического решения для кусочно-гладкого импульса

```
public double[] getAnalyticalResult1()
{
    double[] res = new double[G + 1];
    double sum = 0;
    double z = 0;
    double k = 0;
    double wm = 0;
    double sinwmt = 0;
    double coswmt = 0;
    double w = (2 * Math.PI * c) / lambda;
    double w2 = w * w;
    double[] wm2 = new double[count + 1];
    double x = lx / 2;
    double a2 = (eps * w2) / (c * c) - (Math.PI * Math.PI) / (lx * lx);
    double b2 = (c * c * a2) / eps;
    double sinwt = Math.Sin((2 * Math.PI * tmkm * Math.Sqrt(eps)) / lambda);
    for (int m = 0; m <= count; m++)
    {
        wm2[m] = (((c * c * Math.PI * Math.PI) / eps) * ((1 / (lx * lx)) + (((1 + 2 * m) *
            (1 + 2 * m)) / (4 * lz * lz)))));
    }
    if (tmkm <= tmkm1)
    {
        for (int g = 0; g <= G; g++)
        {
            z = hg * g;
            sum = 0;
            k = 0;
            sinwmt = 0;
            wm = 0;
            for (int m = 0; m <= count; m++)
            {
                wm = Math.Sqrt(wm2[m]);
                sinwmt = Math.Sin(Math.Sqrt(wm2[m]) * tmkm * Math.Sqrt(eps) / c);
                k = (b2 / (wm2[m] - w2)) * (wm * sinwt - w * sinwmt) - w * sinwmt;
                sum += Math.Sin(Math.PI * x / lx) * Math.Sin(Math.PI * (1 + 2 * m) * z / (2
                    * lz)) * k * (1 - Math.Cos(Math.PI * (1 + 2 * m) / 2)) * (4 / (wm * Math.PI * (1 + 2 * m)));
            }
            res[g] = sum + sinwt * Math.Sin(Math.PI * x / lx);
        }
    }
    else
    {
        for (int g = 0; g <= G; g++)
        {
            z = hg * g;
            sum = 0;
            k = 0;
            sinwmt = 0;
            coswmt = 0;

```

- разрыв (конец фрагмента) -

Б.2 Функция построения численного решения

```
public double[, ,] getNumericalResult()
{
    double[, ,] values = new double[K + 1, I + 1, J + 1];
    double[] cx = new double[I + 1];
    double[] cz = new double[I + 1];
    for (int i = 0; i <= I; i++)
    {
        values[1, i, 0] = getPsi(i, 1);
        cx[i] = Math.Pow(ht / hx, 2) / eps;
        cz[i] = Math.Pow(ht / hz, 2) / eps;
    }
    for (int k = 1; k < K; k++)
    {
        for (int i = 1; i < I; i++)
        {
            if (ht * k <= tmkm1)
            {
                values[k + 1, i, 0] = getPsi(i, k + 1);
            }
        }
        for (int j = 1; j <= J; j++)
        {
            if (j != J)
            {
                for (int i = 1; i < I; i++)
                {
                    values[k + 1, i, j] = cx[i] * (values[k, i - 1, j] + values[k, i + 1,
                    j]) + cz[i] * (values[k, i, j - 1] + values[k, i, j + 1]) - 2 * (cx[i]
                    + cz[i] - 1) * values[k, i, j] - values[k - 1, i, j];
                }
            }
            else
            {
                for (int i = 1; i < I; i++)
                {
                    values[k + 1, i, J] = cx[i] * (values[k, i - 1, J] + values[k, i + 1,
                    J]) + 2 * cz[i] * values[k, i, J - 1] - 2 * (cx[i] + cz[i] - 1) *
                    values[k, i, J] - values[k - 1, i, J];
                }
            }
        }
        double[] arr = new double[I + 1];
        for (int i = 0; i <= I; i++)
        {
            arr[i] = values[k + 1, i, j];
        }
        if (areZeros(arr))
        {
            break;
        }
    }
}
return values;
}
```