Лабораторная работа №1 по курсу оптоинформационные технологии и системы.

Основы трейсинга лучей

February 24, 2018

1 Описание луча в изотропной среде

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{\rho}_0 + \vec{e}t \tag{1}$$

Здесь$\vec{\rho}_0$ - радиус-ветор точки начала луча; $\vec{e}$ - вектор направления луча (для упрощения в дальнейшем будем считать, что $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$); t - параметр, определяющий длинну луча. Такая запись справедлива только для изотропных сред!

2 Пересесчение с плоскостью

Уравнение плосоксти ($\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ - скалярное произведение):

$$(\vec{n}, (\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0$$

Здесь $\vec{n}$- вектор нормали к плоскости; $\vec{r}_0$- радиус вектор через который плоскость проходит.

Что бы нати точку пересечения:

$$(\vec{n}, (\vec{\rho}_0 + \vec{e}t - \vec{r}_0)) = 0$$

$$(\vec{n}, \vec{e})\, t = (\vec{n}, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0)$$

$$t = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0)}{(\vec{n}, \vec{e})}$$

В том случае, если

$$\vec{\rho}_0 = [0, 0, 0]$$

$$\vec{r} = \vec{e}t \tag{2}$$

Имеем:

$$t = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{e})}$$

3 Преобразование координат

Двольно просто искать пересечение лучей с геометрическими объетами,находящимися в начале кординат. Например, для плосокости удобно сделать так, что бы вектор нормали к ней совпал с осью z. Сама плоскость проходит через оси Ox и Oy. Ось вращения сферических поверхностей так же должна совпадать с Oz, но есть нюанс связанный со знаком кривизны поверхности:

1)Если кривизна поверхности отрицательна, то координаты центра сферы в будут:$[0, 0, -R]$

2)Если кривизна поверхности положительна, то координаты центра сферы в будут:$[0, 0, R]$

Пускай собственный базис поверхности состоит из трёх векторов: $\vec{t}$ - тангент; $\vec{b}$ - битангент; $\vec{n}$ - нормаль, которая совпадает с осью Z.

В виде матриц это может быть записано следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Что бы задать поверхности ориентацию базис нужно умножить на матрицу поворота и сдвига.

Матрица поворота состоит иза произведения трёх матриц для поворота по отдельным осям:

$$M_{rot}(\alpha, \beta, \gamma) = M_{rot}^{x}(\alpha)\, M_{rot}^{y}(\beta)\, M_{rot}^{z}(\gamma) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оперировать будем четырёхмерными матрицами, поэтому матрицу поворота модифицируем следующим образом:

$$M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} M_{rot}(\alpha, \beta, \gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Стоит отметить замечательное свойство такой матрицы:

$$M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma)^{T}$$

Выбор четырёхмерных матриц целесообразен тем, что мы можем записать матрицу сдвига в следующем виде:

$$M_{shift}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r_x \\ 0 & 1 & 0 & r_y \\ 0 & 0 & 1 & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тем самым все преобразования над лучами мы сведём к матричным преобразованиям.

Векторы, которые будут подвергаться преобразованиям должны удовлетворять следующим условиям :

Если вектор задаёт положение в пространстве, то он имеет следующий вид:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z, 1);$$

Если вектор задаёт направление , то:

$$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z, 0);$$

Лекго убедиться в том, что вектор направления инвариантен относительно сдвига.

Получается, что для произвольного аналитически заданного геометрического объека, который находится в точке $\vec{r}_0$и ориентирован углами (α, β, γ)точки пересечения лучей ищутся по следующему алгоритму:

1) Мы должны перейти собственную ситему координат объекта, преобразовав начала и напраления лучей:

$$\vec{r'} = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma) \right] M_{shift}(\vec{r})\, (\vec{r}, 1)^{T}$$

$$\vec{e'} = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma) \right] M_{shift}(\vec{e})\, (\vec{e}, 0)^{T}$$

Поворот инвареантен относительно сдвига, поэтому:

$$\vec{e'} = \left[\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{b} \\ \vec{n} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{rotation}(\alpha, \beta, \gamma) \right] (\vec{e}, 0)^{T}$$

Определить точки пересечения лучей с поверхностью. Параметрическая запись в этом случае очень удобна тем, что длина луча от начала до пересечения с поверхностью инвариантна относительно поворота и сдвига. Длина луча, как было указано ранее, является значением параметраt.

4 Пересечение луча со сферой

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}t \tag{3}$$

Сфера задана в виеде :

$$(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0, \vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = R^2 \tag{4}$$

Что бы найти точку пересечения нам надо подставить 1 в 2:

$$(\vec{r}_0 + \vec{e}t - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 + \vec{e}t - \vec{\rho}_0) = R^2$$

Перезапишм это всё в виде от t:

$$(r_x + e_x t - \rho_x)^2 + (r_y + e_y t - \rho_y)^2 + (r_z + e_y t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$(r_x + e_x t - \rho_x)^2 + (r_y + e_y t - \rho_y)^2 + (r_z + e_y t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$r_x^2 + 2r_x (e_x t - \rho_x) + (e_x t - \rho_x)^2 + r_y^2 + 2r_y (e_y t - \rho_y) + (e_y t - \rho_y)^2 + r_z^2 + 2r_z (e_z t - \rho_z) + (e_z t - \rho_z)^2 = R^2$$

$$r_x^2 + 2r_x e_x t - 2r_x \rho_x + e_x^2 t^2 - 2te_x \rho_x + \rho_x^2 + ...$$

$$+r_y^2 + 2r_y e_y t - 2r_y \rho_y + e_y^2 t^2 - 2te_y \rho_y + \rho_y^2 + ...$$

$$+r_z^2 + 2r_z e_z t - 2r_z \rho_z + e_z^2 t^2 - 2te_z \rho_z + \rho_z^2 = R^2$$

$$\left(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\right) t^2 + 2t \left(r_x e_x - e_x \rho_x + r_y e_y - e_y \rho_y + r_z e_z - e_z \rho_z\right) + (r_x - \rho_x)^2 + (r_y - \rho_y)^2 + (r_z - \rho_z)^2 = R^2$$

Последнее выражение можно записать компактно в виде:

$$(\vec{e}, \vec{e})\, t^2 + 2t\, (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) + (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2 =$$

В таком случае:

$$t_{1,2} = \frac{-(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - (\vec{e}, \vec{e})\left((\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2\right)}}{(\vec{e}, \vec{e})}$$

Так как:

$$(\vec{e}, \vec{e}) = 1$$

$$t_{1,2} = -(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - (\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) + R^2}$$

Если сфера находится в центре

$$t_{1,2} = -(\vec{r}_0, \vec{e}) \pm \sqrt{(\vec{r}_0, \vec{e})^2 - ((\vec{r}_0, \vec{r}_0) - R^2)}$$

Луч пересечёт сферу только в случае

$$(\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{e})^2 - \left((\vec{r}_0 - \vec{\rho}_0, \vec{r}_0 - \vec{\rho}_0) - R^2\right) \geq 0$$

Если луч пересекает сферу, то для нормали в точках пересечения имеем два варианта:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}\,(t_{1,2}) - \vec{\rho}_0}{\|\vec{r}\,(t_{1,2}) - \vec{\rho}_0\|}$$

Если у нас выпуклая поверхность, то

$$(\vec{n}, \vec{e}) > 0$$

Если вогнутая, то

$$(\vec{n}, \vec{e})\ ¡0$$

5 Пересечения луча элипсойдом

Луч задан параметрически в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}t \tag{5}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + e_x t \\ y = y_0 + e_y t \\ z = z_0 + e_z t \end{cases}$$

Эдипс задан в виде:

$$\frac{\left(x - \rho_x\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - \rho_y\right)^2}{b^2} + \frac{\left(z - \rho_z\right)^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{\left(x_0 + e_x t - \rho_x\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_0 + e_y t - \rho_y\right)^2}{b^2} + \frac{\left(z_0 + e_z t - \rho_z\right)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0\left(e_x t - \rho_x\right) + \left(e_x t - \rho_x\right)^2}{a^2} + \frac{y_0^2 + 2y_0\left(e_y t - \rho_y\right) + \left(e_y t - \rho_y\right)^2}{b^2} + \frac{z_0^2 + 2z_0\left(e_z t - \rho_z\right) + \left(e_z t - \rho_z\right)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0 e_x t - 2x_0\rho_x + e_x^2 t^2 - 2e_x\rho_x t + \rho_x^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{y_0^2 + 2y_0 e_y t - 2y_0\rho_y + e_y^2 t^2 - 2e_y\rho_y t + \rho_y^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{z_0^2 + 2z_0 e_z t - 2z_0\rho_z + e_z^2 t^2 - 2e_z\rho_z t + \rho_z^2}{c^2} = 1$$

Сгруппируем

$$\frac{e_x^2 t^2 + 2\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)t + \rho_x^2 - 2x_0\rho_x + x_0^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{e_y^2 t^2 + 2\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)t + \rho_y^2 - 2y_0\rho_y + y_0^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{e_z^2 t^2 + 2\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)t + \rho_z^2 - 2z_0\rho_z + z_0^2}{c^2} = 1$$

Ещё раз упростим:

$$\frac{e_x^2 t^2 + 2\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)t + \left(\rho_x - x_0\right)^2}{a^2} + ...$$

$$+\frac{e_y^2 t^2 + 2\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)t + \left(\rho_y - y_0\right)^2}{b^2} + ...$$

$$+\frac{e_z^2 t^2 + 2\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)t + \left(\rho_z - z_0\right)^2}{c^2} = 1$$

внесем параметр t:

$$\left(\frac{e_x^2}{a^2} + \frac{e_y^2}{b^2} + \frac{e_z^2}{c^2}\right)t^2 + 2t\left(\frac{\left(x_0 e_x - e_x\rho_x\right)}{a^2} + \frac{\left(y_0 e_y - e_y\rho_y\right)}{b^2} + \frac{\left(z_0 e_z - e_z\rho_z\right)}{c^2}\right) + \frac{\left(\rho_x - x_0\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\rho_y - y_0\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\rho_z - z_0\right)^2}{c^2} = 1$$

Умножим всё на $(abc)^2$

$$\left((bc)^2 e_x^2 + (ac)^2 e_y^2 + (ab)^2 e_z^2\right)t^2 + ...$$

$$+2t\left((bc)^2(x_0e_x-e_x\rho_x)+(ac)^2(y_0e_y-e_y\rho_y)+(ab)^2(z_0e_z-e_z\rho_z)\right)+...$$

$$+(bc)^2(\rho_x-x_0)^2+(ac)^2(\rho_y-y_0)^2+(ab)^2(\rho_z-z_0)^2=(abc)^2$$

Введём диагональную матрицу:

$$M_{abc}=\begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}$$

Тогда последнее выражение можно легко и компактно записать в следующем виде:

$$\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)t^2+2t\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)+\left(M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)-(abc)^2=0$$

Получили обычное квадратное уравнение для которого

$$D=4\left[\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)^2-\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T\right)\left(\left(M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)-(abc)^2\right)\right]$$

$$t_{1,2}=\frac{-\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)\pm}{}...$$

$$\frac{\pm\sqrt{\left(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)^2-(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T)\left(\left(M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T;M_{abc}(\vec{r}-\vec{\rho}_0)^T\right)-(abc)^2\right)}}{(M_{abc}\vec{e}^T;M_{abc}\vec{e}^T)}$$

6 Алгоритм трассировки луча на отражающей поверхности

При трассировке лучей через какую-либо поверхность необходимо сделать три шага:

1) Найти точки пересечения для падающих на поверхность лучей и отсеять те лучи, которые ее не пересекают.

2) Определеить геометрические и физические (например, нормаль и коэффициент преломления) свойства поверхности в точках, где ее пересекают лучи.

3) Создать новые лучи, количество которых равно количеству той части исходных лучей, которые пересекли поверхность. Посчитать углы отклонения и установить для каждого луча в качестве r_0координаты точки пересечения с поверхностью.

Направление отражённого луча задаётся формулой:

$$\vec{e}'=\vec{e}-2(\vec{e},\vec{n})\vec{n}$$

7 Алгоритм трассировки луча на преломляющей поверхности

Алгоритм аналогичен предудщему, с той лишь разницей, что теперь направление луча определяется из следующих соображений:

$$\cos\alpha_1=(\vec{e},\vec{n})$$

$$\sin\alpha_1=\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}=\sqrt{1-(\vec{e},\vec{n})^2}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin\alpha_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1=\frac{n_1}{n_2}\sqrt{1-(\vec{e},\vec{n})^2}$$

$$\cos\alpha_2=\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}=\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\left(1-(\vec{e},\vec{n})^2\right)}=\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}+\frac{n_1^2}{n_2^2}(\vec{e},\vec{n})^2}=\frac{n_1}{n_2}(\vec{e},\vec{n})\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2}{(\vec{e},\vec{n})^2n_1^2}+1}$$

$$G = n_1 \cos\alpha_1 - n_2 \cos\alpha_2$$

$$n_2 \vec{e}' = n_1 \vec{e} - \vec{n}G = n_1 \vec{e} - \vec{n}\left(n_1\left(\vec{e},\vec{n}\right) - n_1\left(\vec{e},\vec{n}\right)\sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{\left(\vec{e},\vec{n}\right)^2 n_1^2} + 1}\right) = n_1 \vec{e} - \left(\vec{e},\vec{n}\right)\vec{n}n_1\left(1 - \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{\left(\vec{e},\vec{n}\right)^2 n_1^2} + 1}\right)$$

Здесь n_1-коэффициент преломления перед поверхностью,n_2-коэффициент преломления после поверхности.

Задание

1. Требуется создать программу, которая запрашивает параметры луча и параметры поверхности. результатом работы программы должны быть координаты точки пересечения луча с поверхностью.

В качестве поверхности выбрать плоскость, сферу, эллипсоид.

2. На входе тоже самое. На выходе параметры луча, отраженного данной поверхностью.

3. На входе тоже самое. На выходе параметры луча, преломленного данной поверхностью.

4. Создать механизм отображения хода лучей и поверхности в двумерном случае.

5*. Создать механизм отображения хода лучей и поверхности в трехмерном случае.